XO 1

J. 2902-A

session de 1990

concours interne
et concours d'accès à l'échelle de rémunération
des professeurs agrégés

COMPOSITION SUR LA PHYSIQUE ET LE TRAITEMENT AUTOMATISÉ DE L'INFORMATION

Durée : 5 heures

Épreuve commune aux options
PHYSIQUE ET CHIMIE, PHYSIQUE ET PHYSIQUE APPLIQUÉE

Aucune documentation n'est autorisée.

Calculatrice électronique de poche — y compris calculatrice programmable et alphanumérique — à fonctionnement autonome, non imprimante, autorisée conformément à la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Tournez la page S.V.P.

Rappel du texte définissant la nature de l'épreuve.

Le candidat propose, pour un niveau et des objectifs désignés, une progression relative à une partie d'un programme de lycée, classes post-baccalauréat comprises, en approfondit quelques points, prévoit un accompagnement expérimental utilisant éventuellement l'ordinateur, élabore des exercices propres à consolider l'acquisition des connaissances, savoir-faire et méthodes ainsi qu'à participer à l'évaluation des élèves.

Organisation de l'épreuve.

La première partie a pour but d'aider le candidat à rassembler les éléments lui permettant de traiter la deuxième partie. Les questions y ont été classées selon un ordre qui ne suggère aucune progression pédagogique. Le candidat doit s'efforcer de résoudre les questions posées dans la première partie, même s'il ne souhaite pas les utiliser toutes dans la seconde partie.

Dans la seconde partie, il est demandé au candidat de proposer une progression relative au paragraphe « 2. Interférences, diffraction » de la partie « B. Physique ondulatoire » du programme de la classe de Mathématiques spéciales P′. Un extrait du programme et les horaires de cette classe sont rappelés en annexe.

Le candidat peut utiliser, s'il le souhaite, les question évoquées dans la première partie même s'il ne les a résolues que partiellement. Le candidat garde la liberté d'introduire des points qui n'auraient pas été abordés dans la première partie et qu'il estime nécessaires à la cohérence de sa progression.

Une troisième partie concerne des aspects complémentaires de la lumière à travers un problème que le candidat doit résoudre. Cette troisième partie est indépendante des deux précédentes.

PREMIÈRE PARTIE

I. MODÉLISATION

Une grandeur oscillante est représentée par $s(t) = A \cos \omega t$. On appellera intensité la grandeur $I = \langle s^2(t) \rangle$, $\langle s^2(t) \rangle$ désignant la valeur moyenne temporelle de $s^2(t)$ sur une durée $\Delta t \gg \dfrac{2\pi}{\omega}$.

1. Deux ondes scalaires planes, progressives, de même pulsation ω, d'amplitudes A_1 et A_2, de vecteurs d'onde $\vec{k}_1$ et $\vec{k}_2$, interfèrent au point P de l'espace repéré par le vecteur $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. Donner l'expression de l'amplitude complexe de la vibration résultante puis de l'amplitude réelle. Calculer l'intensité $I(\vec{r})$ au point $\vec{r}$. Quelles sont les surfaces d'égale intensité ?

   Calculer l'intensité $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ de chacune des ondes supposée seule. Comparer avec $I(\vec{r})$ et commenter.

2. On considère deux sources lumineuses S_1 et S_2, ponctuelles, cohérentes, émettant en phase des vibrations de même amplitude et de même période. La célérité de l'onde est c et la longueur d'onde est λ. On représente $s_1 = A \cos \omega t$ et $s_2 = A \cos \omega t$ les grandeurs vibratoires en S_1 et S_2. On pose $a = S_1S_2$, $\delta = S_2P - S_1P$ où P représente un point de l'espace, et l'on appelle O le milieu du segment S_1S_2.

2.1. Montrer que, assez loin des sources, les surfaces d'égale intensité sont des hyperboloïdes.

2.2. Déterminer l'intensité en un point P situé :

a. dans un plan parallèle à S_1S_2, à une distance D grande devant a et au voisinage de O′ projection de O sur ce plan. Définir l'interfrange. Quelle est la valeur moyenne spatiale de l'intensité observée sur le plan ?

b. dans un plan perpendiculaire à S_1S_2 et à une distance de S_1 grande devant a.

On pose $\theta = (\overrightarrow{S_2S_1}, \overrightarrow{OP})$. Montrer que l'on observe des anneaux alternativement sombres et brillants.

L'anneau brillant correspondant à l'ordre d'interférence p_k est vu du point O sous le diamètre angulaire $2\theta_k$. Exprimer l'angle θ_k, supposé petit, en fonction de p_k, λ et a, puis en fonction de p_k, a, λ et p_0 où p_0 est l'ordre d'interférence au centre.

II. DISPOSITIFS EXPÉRIMENTAUX ET APPLICATIONS

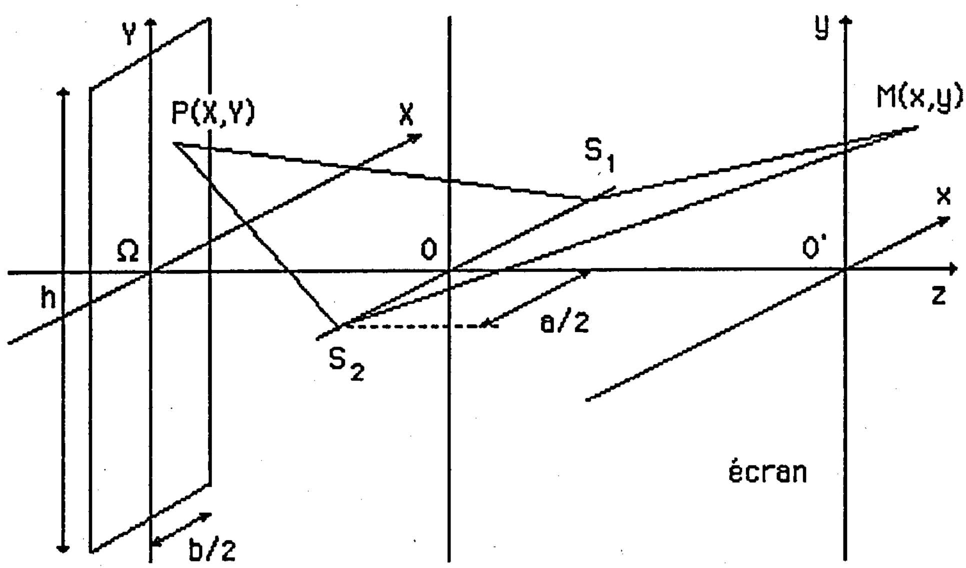
1. Décrire brièvement deux dispositifs expérimentaux de production d'interférences lumineuses à l'exception de l'interféromètre de Michelson. On précisera le champ d'interférence dans le cas où cela est possible.

2. Citer et décrire sommairement au moins deux applications scientifiques ou industrielles des interférences.

3. Décrire deux expériences mettant en évidence des interférences dans d'autres domaines que l'optique.

III. CAS D'UNE SOURCE PRIMAIRE ÉTENDUE

On utilise le dispositif des trous d'Young (S_1, S_2) éclairé par une fente rectangulaire de largeur b et de hauteur h émettant avec une intensité uniforme de la lumière monochromatique, spatialement incohérente (fig. 1). Le phénomène est observé dans le plan $xO'y$ parallèle au plan de la source primaire. On s'intéresse aux rayons émis d'un point P (X, Y) de la fente et reçus au point M (x, y) du plan d'observation.



$\Omega O = d \quad OO' = D \quad S_2S_1 = a$

Figure 1

On suppose que a, $|X|$, $|Y|$, $|x|$ et $|y|$ sont petits devant les distances d et D.

Tournez la page S.V.P.

1. Exprimer en fonction de a, X, x, d et D l'avance de phase de la vibration émise par P et passant par S_2 sur la vibration émise par P et passant par S_1.

2. En déduire l'intensité recueillie au point M. Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$I = K\left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi a b}{\lambda D}\right)}{\frac{\pi a b}{\lambda D}} \cos\left(\frac{2\pi x a}{\lambda D}\right)\right].$$

Pour quelles valeurs de b, les franges disparaissent-elles ?

IV. CAS D'UNE SOURCE POLYCHROMATIQUE

On réalise des interférences à deux ondes à l'aide d'une source primaire polychromatique supposée ponctuelle. On se place dans l'hypothèse où la différence de marche δ des deux rayons qui interfèrent ne dépend pas de la longueur d'onde.

Dans la source primaire ne sont présentes que les radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 ($\lambda_2 > \lambda_1$) de même intensité lumineuse. Les deux longueurs d'onde sont voisines et l'on pose :

$$\lambda_1 = \lambda \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \lambda + \Delta\lambda \quad \text{avec} \quad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1 .$$

1. Montrer que l'intensité peut se mettre sous la forme :

$$I(\delta) = I_0\left[1 + V(\delta)\cos\left(\frac{2\pi\delta}{\lambda}\right)\right]$$

où V est le facteur de visibilité.

Donner l'allure de $V(\delta)$ en fonction de δ. Quelle est la signification physique de $V(\delta)$ négatif ?

On définit localement le contraste des franges par :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

où I_{max} et I_{min} sont respectivement les valeurs locales maximale et minimale de I.

Donner l'expression littérale de C.

2. On utilise la raie jaune du mercure, constituée d'un doublet de longueur d'onde moyenne $\lambda = 578$ nm. On constate que la périodicité de réapparition (ou de disparition) des franges exprimée en nombre de franges est de 288.

Calculer $\Delta\lambda$.

Quel appareil utiliseriez-vous pour faire cette mesure ? Donnez-en une description sommaire.

V. CARACTÉRISTIQUE DE LA LUMIÈRE ÉMISE PAR UNE SOURCE LUMINEUSE PONCTUELLE

1. On se place ici dans l'hypothèse où un atome émet un paquet d'ondes scalaires sinusoïdales. La densité spectrale d'amplitude $a(\omega)$ de ces ondes en fonction de la pulsation ω suit la loi :

$$a(\omega) = \frac{\mathbf{A}}{\omega_2 - \omega_1}$$

où $\mathbf{A}$ est une constante non nulle pour $\omega_1 \leqslant \omega \leqslant \omega_2$; $a(\omega)$ est nulle en dehors de cet intervalle. A l'instant $t = 0$, toutes ces ondes sont en phase et cette phase commune est prise égale à zéro. La grandeur lumineuse $s(t)$ correspondant à l'onde résultante à l'instant t au niveau de la source est définie, en notation complexe, par :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(\omega)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega\,.$$

1.1. Calculer l'amplitude de l'onde résultante $s(t)$ à l'instant t au niveau de la source. Soit 2τ la durée de l'émission de l'atome. Donner un ordre de grandeur de τ en fonction de la différence $\omega_2 - \omega_1$.

1.2. Quelle est la date qui correspond au centre du paquet ?

2. On considère maintenant une source lumineuse de dimensions négligeables formée d'un très grand nombre n d'atomes identiques à l'atome étudié précédemment. On suppose l'intensité de la source suffisamment faible. Dans ces conditions, chaque atome émet indépendamment des autres ; on note t_m la date qui correspond au centre du paquet d'ondes émis par l'atome repéré par l'indice m. Il s'ensuit que l'onde $\mathrm{S}(t)$ au voisinage immédiat de la source résulte de la superposition de n paquets d'ondes, approximativement ceux émis sur l'intervalle $(t - \tau,\ t + \tau)$, la distribution des valeurs de t_m étant aléatoire sur cet intervalle.

2.1. Donner l'expression de $\mathrm{S}(t)$ sous forme :

$$\mathrm{S}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega)\, e^{i\phi(\omega)}\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

où $c(\omega)$ est réelle.

2.2. D'après ce qui précède, $\mathrm{S}(t)$ est la somme d'ondes sinusoïdales de pulsation ω, d'amplitude $c(\omega)$ et de phase $\phi(\omega)$. Sur quelle durée faut-il analyser l'onde pour que son amplitude et sa phase puissent être considérées comme constantes ?

Quel est le comportement de $c(\omega)$ et de $\phi(\omega)$ sur un intervalle de temps $\mathrm{T} \gg \tau$?

2.3. n étant très grand, montrer que l'amplitude moyenne de $c(\omega)$ est proportionnelle à $\sqrt{n}$. En quoi ce résultat est-il en accord avec le bon sens du point de vue de l'intensité ?

2.4. On montre à partir du modèle précédent que la fluctuation quadratique moyenne $\Delta\mathrm{I}$ de l'intensité I est telle que $\dfrac{\Delta \mathrm{I}}{\mathrm{I}}$ est de l'ordre de l'unité.

Pour certaines sources très intenses, on constate que $\dfrac{\Delta \mathrm{I}}{\mathrm{I}}$ est très inférieur à l'unité. Quelle hypothèse remettez-vous en cause ?

Donner un exemple d'une telle source.

Tournez la page S.V.P.

VI. DIFFRACTION

A

1. On considère une fente à bords rectilignes de hauteur grande devant sa largeur b éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ. On n'observe les phénomènes que dans des directions perpendiculaires à la hauteur de la fente dans un plan (P) très éloigné (diffraction à l'infini).

Dans l'approximation du principe de Huygens-Fresnel :

1.1. Exprimer l'amplitude de la vibration envoyée dans la direction θ (fig. 2) par une portion élémentaire de la fente (de largeur $d\xi$ et de hauteur unité). On prendra comme origine des phases celle de l'onde émise par le centre O de la fente.

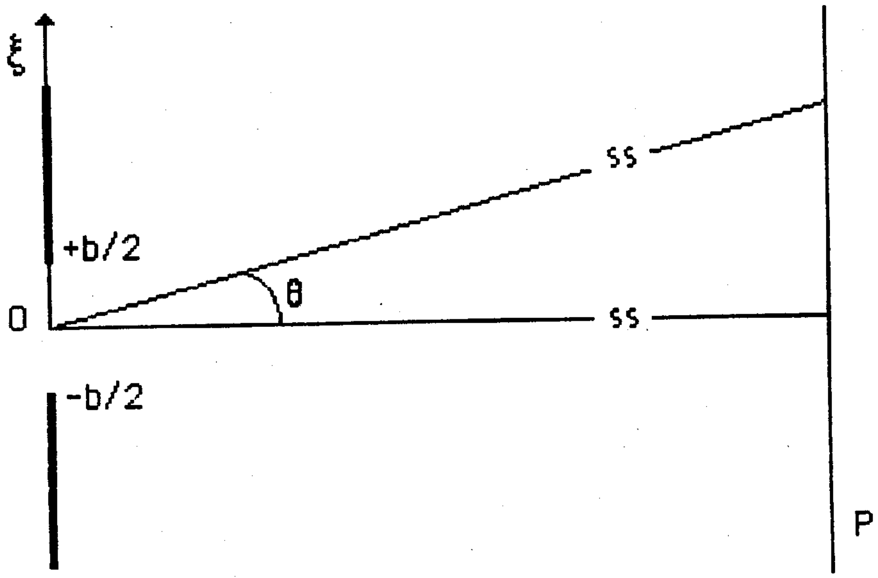


Figure 2

1.2. Donner l'amplitude puis l'intensité lumineuse envoyée dans la direction θ par la totalité de la fente.

1.3. Si l'on pose $\alpha = \dfrac{\sin\theta}{\lambda}$, montrer que l'amplitude vibratoire $A(\alpha)$ peut s'écrire sous la forme d'une transformée de Fourier de la répartition vibratoire dans le plan de la fente $T(\xi)$:

$$(1) \qquad A(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} T(\xi)\, e^{\varepsilon i 2\pi\alpha\xi}\, d\xi \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \pm 1$$

selon le choix pris pour l'écriture de la phase de l'onde. Préciser $T(\xi)$ dans le cas particulier considéré ici.

2. On translate la fente dans son plan d'une distance ξ_0 parallèlement à $O\xi$ (fig. 2). Trouver simplement à l'aide de l'expression (1) comment sont modifiés $A(\alpha)$ et $I(\alpha)$.

3. En utilisant les résultats obtenus en 2. :

3.1. Calculer l'amplitude vibratoire envoyée dans la direction θ par un système de N fentes identiques de largeur b dont les centres sont espacés de a (fig. 3).

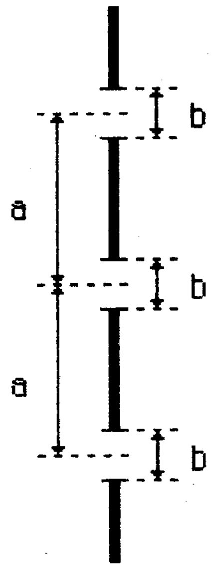


Figure 3

3.2. Calculer l'intensité vibratoire en fonction de α, puis en fonction des coordonnées du point courant appartenant au plan d'observation ramené à distance finie à l'aide d'une lentille.

3.3. L'expression obtenue pour l'intensité est le produit de deux facteurs. En la comparant à celle obtenue en 1.2., pour une fente seule, que peut-on en conclure ?

4. L'application du principe de Huygens-Fresnel montre que le phénomène de diffraction est la résultante d'un processus d'interférences. Peut-on le montrer sur l'expression obtenue en 3.2. dans le cas particulier où $N = 2$ et en prenant $a = b$?

5. Dans le cas général de N fentes traité en 3. :

5.1. Déterminer pour quelles valeurs de α on observe des maximums d'interférences. Calculer dans ces cas la valeur du terme d'interférence.

5.2. Montrer que les maximums les plus intenses coïncident avec tous ceux obtenus lorsque $N = 2$.

On définit la largeur d'un pic principal d'interférence par la distance entre deux zéros consécutifs.

Calculer cette largeur dans le plan d'observation. Pouvez-vous, sans calculs, justifier l'affinement du pic observé par rapport au cas $N = 2$ en considérant, par exemple, le pic central (cas où $\sin\theta \approx \theta$) ?

Rappel.

La somme des N premiers termes d'une suite géométrique a pour expression :

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} x^n = \frac{x^N - 1}{x - 1}.$$

Tournez la page S.V.P.

B

Les figures 4 et 5 reproduisent des ouvertures diffractantes éclairées sous incidence normale par une onde plane monochromatique ainsi que leur figure de diffraction à l'infini.

Associer chaque ouverture avec sa figure de diffraction en précisant bien, chaque fois, les raisons de votre choix.

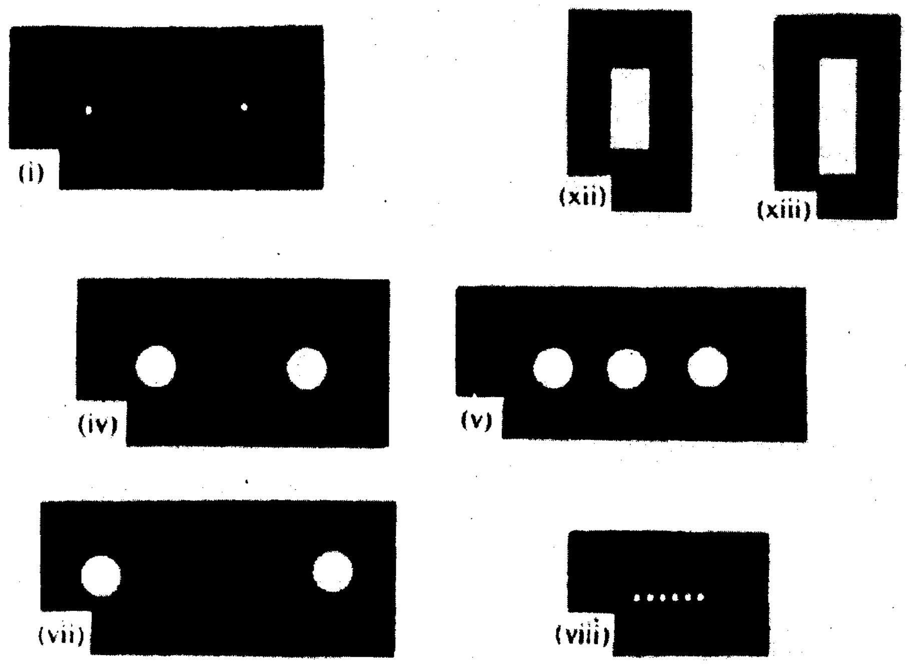


Figure 4

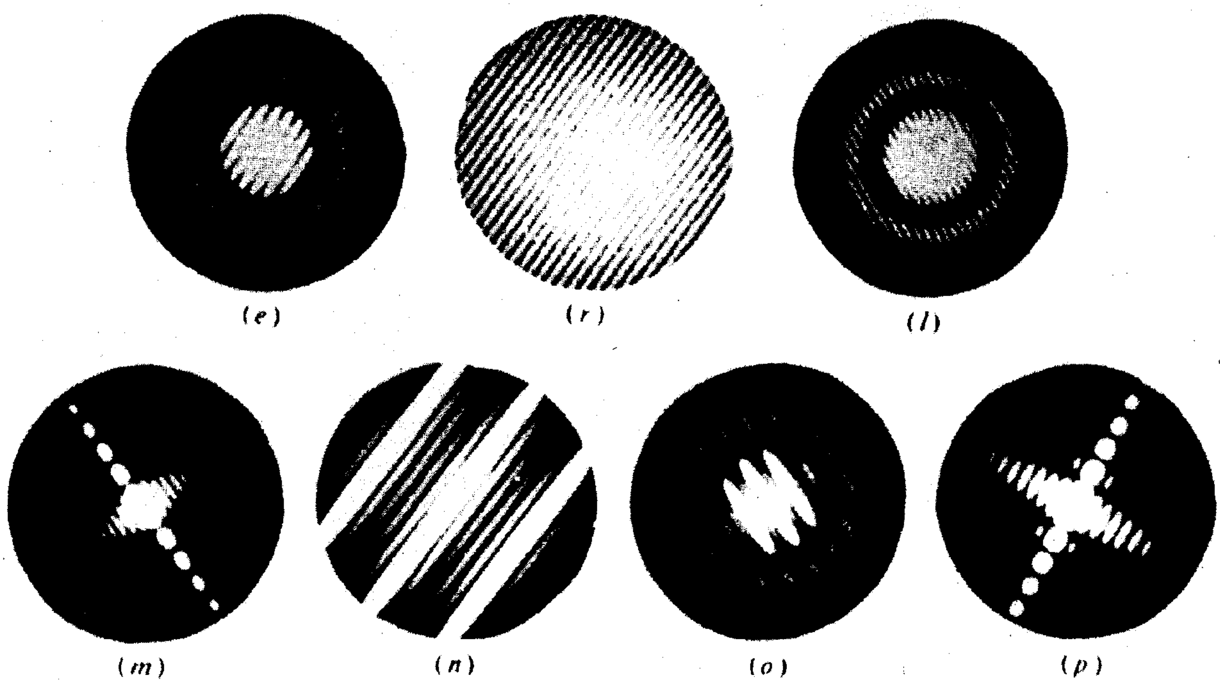


Figure 5

DEUXIÈME PARTIE

Le candidat propose une progression relative au paragraphe « 2. Interférences, diffraction » de la partie « B. Physique ondulatoire » du programme de physique de la classe de Mathématiques Spéciales P'. Si le candidat le juge utile, il peut faire référence aux questions abordées dans la première partie en citant le numéro précis de la question.

Il est demandé de :

– décrire sommairement les expériences réalisées par le professeur ;

– proposer des exercices ou des problèmes qui peuvent comprendre ceux dont la résolution a été demandée dans la première partie. Préciser leur place dans la progression et leur rôle selon qu'ils sont destinés à l'assimilation d'un point de cours, à l'illustration d'un ordre de grandeur, à la justification de l'emploi d'une technique ou d'un appareil, à la vérification des capacités acquises.

La rédaction de cette partie doit être concise et ne doit pas dépasser trois pages.

TROISIÈME PARTIE

Rédiger la solution de la partie ci-dessous d'un problème du type « Concours aux grandes écoles » et intitulée :

Réflexion de la lumière sur un métal

Cette partie du problème étudie la réflexion normale de la lumière sur la surface des métaux simples comme les alcalins. Elle utilise la théorie électromagnétique classique de Maxwell et le modèle élémentaire du gaz d'électrons libres pour le métal.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, les trois vecteurs unitaires étant notés $\hat{x}$, $\hat{y}$, et $\hat{z}$. Le demi-espace $z > 0$ est entièrement occupé par un métal de surface $z = 0$ non chargée.

Une onde électromagnétique incidente, plane, progressive, polarisée rectilignement et sinusoïdale de pulsation ω se propage dans le demi-espace vide $z < 0$ selon la direction des z croissants. On écrit son champ électrique, en notation complexe, sous la forme :

$$\vec{E}_i(z, t) = E_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

E_0 et k_0 étant deux réels positifs.

On rappelle que le champ magnétique s'obtient par la relation :

$$\vec{B}_i = \frac{\hat{z} \wedge \vec{E}_i}{c}.$$

On suppose que le métal a des permittivités électrique et magnétique ε_0 et μ_0 identiques à celles du vide. On désigne par n le nombre par unité de volume des électrons de conduction de masse m et par e la charge élémentaire.

On appelle pulsation de plasma :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n e^2}{m \varepsilon_0}}$$

on donne :

$m = 0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg ; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H \cdot m^{-1}}$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $c = (\varepsilon_0 \cdot \mu_0)^{-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Tournez la page S.V.P.

On rappelle les formules suivantes concernant le rotationnel d'un vecteur $\vec{a}$ et l'expression de son laplacien vectoriel $\Delta \vec{a}$ en coordonnées cartésiennes x, y, z :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{a} = 0 \qquad \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{a} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

$$\Delta \vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial z^2}.$$

I.1. Écrire les équations de Maxwell dans la partie conductrice où le champ électrique est $\vec{E}$, le champ magnétique $\vec{B}$, la densité de charge ρ et la densité du courant $\vec{j}$.

I.2. Dans un modèle simplifié, on fait abstraction de l'agitation thermique et on suppose que tous les électrons de conduction ont même vitesse $\vec{v}$ par rapport au réseau cristallin et qu'en plus des forces électrique et magnétique, ils sont soumis à une force de freinage $\dfrac{-m\vec{v}}{\tau_0}$ par électron.

On cherche le champ électrique $\vec{E}$ de l'onde qui s'est établi dans le métal sous la forme :

$$\vec{E}(z, t) = \tau \cdot E_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{i(kz - \omega t)}$$

k et τ étant des quantités complexes.

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron et en négligeant la force magnétique, montrer que $\vec{j}$ peut se mettre sous la forme $\vec{j} = \sigma(\omega) \cdot \vec{E}$, $\sigma(\omega)$ étant complexe.

On précisera les approximations faites.

I.3. La conductivité σ du sodium à la température ambiante mesurée en courant continu est $2{,}1 \cdot 10^7 \ \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. Sa densité d'électrons de conduction vaut $n = 2{,}65 \cdot 10^{28} \ \text{m}^{-3}$. Calculer τ_0.

Quelle est sa signification physique ?

II. On suppose que la pulsation ω du champ $\vec{E}$ est du domaine de l'optique donc que $\omega \gg \dfrac{2\pi}{\tau_0}$.

II.1. Quelle hypothèse vous semble remise en cause ?

Montrer qu'on peut néanmoins conserver la relation :

$$\vec{j} = \sigma(\omega) \cdot \vec{E} \qquad \text{avec} \qquad \sigma(\omega) = \frac{n e^2}{-i \omega m}.$$

II.2. On admet que la relation précédente reste applicable dans le contexte étudié même au voisinage de $z = 0$. Montrer que la densité de charge ρ dans le métal est nulle et que $\vec{E}$ satisfait à l'équation :

$$\Delta \vec{E} = \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2} \cdot \vec{E}$$

III. On suppose maintenant que $\left(\dfrac{2\pi}{\tau_0}\right) \ll \omega < \omega_p$.

III.1. Calculer $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$ dans le métal et les exprimer à l'aide de τ, E_0, ω et $\delta = c(\omega_p^2 - \omega^2)^{-\frac{1}{2}}$. Que peut-on dire de l'onde dans le métal ?

III.2 Les courants volumiques $\vec{j}(z, t)$ qui se sont établis dans le métal créent dans le demi-espace vide $z \leqslant 0$ une onde réfléchie que l'on admet être de la forme :

$$\vec{E}_r = r \cdot E_0 \cdot \hat{x} \cdot e^{i(-k_0 z - \omega t)}$$

r étant complexe.

Déterminer r et τ en fonction de δ, ω et c à l'aide de la continuité des champs électrique et magnétique en $z = 0$.

Quelle conséquence physique tirez-vous de l'expression de r ?

III.3. *Application numérique.*

Calculer un ordre de grandeur de la profondeur de pénétration du champ électromagnétique pour une onde lumineuse de longueur $\lambda = 0{,}6\ \mu m$ dans le cas du sodium.

III.4. Lorsque le paramètre δ défini en III.1. est très petit, on peut considérer que les courants circulent uniquement sur la surface $z = 0$ avec une densité de courant $\vec{j_s} = j_s \cdot \hat{x}$.

Donner l'expression du champ électromagnétique créé par cette nappe de courant dans le demi-espace $z > 0$. En déduire que l'onde réfléchie a bien la forme admise à la question III.2.

IV. Expérimentalement on étudie la réflexion de la lumière sous incidence normale sur des lames métalliques à faces parallèles d'épaisseur l .

IV.1. À partir de quelle valeur de l les résultats obtenus précédemment s'appliquent-ils sans modification ?

Que faut-il considérer si tel n'est pas le cas ?

IV.2. Les mesures expérimentales montrent que lorsque la longueur d'onde λ de la lumière incidente diminue, le pouvoir réfléchissant très élevé des métaux alcalins s'effondre et que ceux-ci deviennent transparents dans l'ultraviolet. Le tableau ci-dessous rassemble les densités électroniques n et les longueurs d'onde de coupure λ_c obtenues expérimentalement (pour $\lambda < \lambda_c$ le film métallique est transparent).

	Li	Na	K	Rb
$n\,(10^{28}\ m^{-3})$	4,70	2,65	1,40	1,15
$\lambda_c\,(\mu m)$	0,155	0,210	0,315	0,340

Le modèle étudié rend-il compte du phénomène ? S'il existe des divergences, comment les interprétez-vous ?