ENS ULM M

SESSION DE 1992

Groupe C/S

PHYSIQUE

DURÉE : 6 heures

PRÉAMBULE

Cette épreuve comporte deux problèmes qui peuvent être traités indépendamment. Les trois parties du premier sont techniquement assez indépendantes : seuls les résultats des questions I.A.1. à I.A.4. et I.B.3., sont nécessités par la suite. Les trois parties du second problème sont solubles de manière séparée, mais leur traitement dans l'ordre proposé est conseillé.

Aucune *application numérique* n'est explicitement demandée au fil de l'énoncé : il faut l'interpréter comme un encouragement à prendre *l'initiative personnelle* de faire ces applications partout où elles seront jugées utiles ou significatives, quitte à pallier l'absence d'une donnée précise par une estimation d'ordre de grandeur.

Dans les deux problèmes, on étudie le comportement d'un gaz qui sera partout supposé parfait. Rappelons ici que l'état mécanique et thermodynamique d'un tel fluide est entièrement caractérisé par la valeur en tout point de la masse volumique μ (masse par unité de volume), de la vitesse $\vec{u}$, et de la température T. La pression p est alors donnée par l'équation d'état :

$$p = RT\frac{\mu}{M},$$

où R est la constante des gaz parfaits, et M la masse molaire du gaz.

Les compressibilités adiabatique et isotherme, définies par :

$$\chi_S = \frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_S \qquad \text{et} \qquad \chi_T = \frac{1}{\mu}\left.\frac{\partial\mu}{\partial p}\right)_T,$$

sont liées par la relation :

$$\chi_T = \gamma\chi_S,$$

où $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ est le rapport des chaleurs spécifiques à pression et volume constants.

Dans toute l'épreuve, l'effet des forces de pesanteur sera négligé, ainsi que les effets dus à la viscosité ou à la conduction thermique (sauf mention explicite au I.A.5.) au sein du gaz.

Pour le premier problème, il sera naturel de considérer que le gaz est de l'air, que l'on assimilera à un gaz parfait pour lequel $M = 29\ 10^{-3}$ kg/mole et $\gamma = 7/5$. Pour le second problème, on pourra comparer les résultats obtenus pour de l'air et pour de l'hélium, pour lequel $M = 4\ 10^{-3}$ kg/mole, et $\gamma = 5/3$.

I.A. ONDES SONORES PLANES

I.A.1. Écrire l'équation différentielle, exprimant la conservation locale de matière, liant la masse volumique μ et la vitesse $\vec{u}$.

I.A.2. Écrire l'équation d'Euler liant l'accélération du gaz aux forces exercées par la pression p.

I.A.3. Dans toute la suite, on supposera l'amplitude des ondes sonores assez faible pour pouvoir développer les grandeurs μ et $\vec{u}$ autour de leurs valeurs μ_0 et $\vec{u}_0$ en l'absence d'onde. Montrer que les variations relatives de la pression p et de la température T sont comparables à celles de la densité. On notera μ' et p' les écarts :

$$\mu' = \mu - \mu_0, \qquad p' = p - p_0;$$

p' est appelée pression acoustique. En supposant qu'il n'y a pas d'écoulement stationnaire dans le fluide, linéariser les équations de conservation et d'Euler en ne gardant que les termes d'ordre un en $\vec{u}$, p', μ'.

I.A.4.*a.* En l'absence de conduction thermique, la compression associée aux ondes sonores est adiabatique. On exprimera μ' en fonction de p', et on éliminera la vitesse $\vec{u}$ des équations linéarisées trouvées ci-dessus. Interpréter l'équation obtenue pour la pression acoustique. Calculer en particulier la célérité c des ondes sonores planes. La propagation du son est-elle dispersive ?

b. Exprimer c en fonction de la température T et de la masse molaire M ; à quelle quantité cinétique c peut-elle être comparée ?

I.A.5.*a.* On fera, dans cette question, l'hypothèse contraire que la conduction thermique joue un rôle dominant, si bien que la température est uniforme. Quelle équation obtient-on pour la pression ? Que devient la vitesse du son ?

b. La conductivité thermique κ détermine le courant de chaleur $\vec{J}_T$ résultant d'une inhomogénéité de la température T par $\vec{J}_T = -\kappa \overrightarrow{\nabla} T$. Supposant ici la pression constante, écrire l'équation de conservation locale de l'énergie liant T et $\vec{J}_T$, puis éliminer $\vec{J}_T$ pour obtenir l'équation de diffusion de la chaleur. Prenant pour condition initiale à un instant t_0 une « onde plane de température » $T(t_0, x) = T_0(t_0)\cos(2\pi x/\lambda)$, montrer que l'amplitude $T_0(t)$ décroît exponentiellement, avec une constante de temps τ que l'on calculera.

c. Justifier qualitativement que les ondes sonores planes dans un gaz seront plutôt solution de l'équation adiabatique ou isotherme selon leur fréquence. Donner une fréquence caractéristique du régime intermédiaire.

d. On peut montrer que pour un gaz la conductivité est $\kappa = k\Lambda C_v c\mu$, où k est un facteur numérique de l'ordre de un, Λ le libre parcours moyen (de l'ordre de 10^{-7} m dans l'air ambiant), C_v la chaleur spécifique massique, c et μ la vitesse du son et la masse volumique du gaz. Calculer alors la fréquence caractéristique trouvée ci-dessus. Commenter le résultat. Que peut-on dire du régime isotherme ?

I.A.6. On supposera dans toute la suite que les ondes sonores sont adiabatiques. Pour une onde plane de pression acoustique d'amplitude π', de pulsation ω, se propageant selon l'axe des x, solution de l'équation trouvée à la question I.A.4., calculer la vitesse $\vec{u}(x, t)$. Calculer la densité d'énergie associée à l'onde acoustique. Vérifier que les contributions d'énergie cinétique et d'énergie interne sont égales ; que vous évoque ce dernier résultat ?

I.B. PROPAGATION DANS UN TUBE

On s'intéresse maintenant à la propagation d'ondes sonores périodiques dans un tube cylindrique de section circulaire, de rayon a. On supposera le rayon a petit devant la période spatiale des ondes, et on admettra alors que la vitesse $\vec{u}$ du gaz est quasiment selon l'axe du tube : on notera u son module. En négligeant les effets de la viscosité, on admettra également que les valeurs de p, T et μ ne dépendent pas de la distance à l'axe du tube : ce sont des ondes planes, obéissant aux équations établies à la question I.A.4., qui se propagent dans un tube. On repèrera par x la position le long de l'axe du tube.

I.B.1. Par analogie avec les circuits électriques, on appelle impédance (acoustique) le rapport $Z = \frac{p'}{u}$ de la pression acoustique à la vitesse. Montrer que pour une onde plane monochromatique se propageant dans un tube infini, Z est une constante Z_0 ; calculer sa valeur.

I.B.2. On cherche dans cette question à estimer l'impédance acoustique à l'extrémité ouverte d'un tube.

a. On produit une onde sonore dans un gaz à l'aide d'une sphère dont le rayon R est une fonction du temps donnée par $R = a + \delta \cos(\omega t)$. Quelles équations régissent la propagation des ondes sonores ? Quelles sont les solutions pour la pression acoustique et la vitesse ? On rappelle l'expression en coordonnées sphériques du laplacien d'une fonction $f(r)$ isotrope :

$$r \Delta f = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) ;$$

indiquons en outre qu'il sera commode de considérer la fonction $g = rp'$.

Par analogie avec le cas des circuits électriques, on utilisera des notations complexes lorsque les phases de p' et u sont différentes. En précisant les conventions choisies, calculer l'impédance Z_∞ à très grande distance, et Z_a au voisinage de la surface de la sphère à la limite $\delta \ll a$.

b. Calculer la puissance moyenne rayonnée par la sphère, en fonction de Z_a, δ et ω.

c. Comparer les impédances Z_a et Z_∞ à Z_0. Justifier qualitativement qu'il est licite de supposer que l'impédance à la sortie d'un tube est de la forme $Z_0(\varepsilon + i\varepsilon')$, où ε et ε' sont très petits. Écrire explicitement les deux solutions, p'_+ et p'_-, correspondant à des ondes planes de pulsation ω et d'amplitudes π'_+ et π'_-, se propageant dans la direction des x croissants et dans la direction inverse. Exprimant p' et u en fonction de ces deux solutions, déduire de la donnée de l'impédance la valeur du rapport $\frac{p'_-}{p'_+}$ à l'extrémité ouverte du tube.

d. Discuter l'effet (à l'ordre le plus bas) de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'impédance.

I.B.3. On supposera dans cette question que l'impédance de sortie est assez faible pour être totalement négligée : on supposera donc $\varepsilon = \varepsilon' = 0$. Notant $x = L$ la position de l'extrémité ouverte du tube, calculer à partir de la contrainte en $x = L$ sur les ondes p'_+ et p'_- la valeur en $x = 0$ de l'impédance $Z(\omega)$. Interpréter le résultat, et en donner une représentation graphique qualitative.

I.B.4. Reprendre la question précédente, en supposant ε et ε' petits devant un, mais non nuls. Commenter en particulier les effets respectifs de ces deux paramètres.

I.C. FONCTIONNEMENT D'UNE CLARINETTE

Un instrument à vent se compose de deux dispositifs couplés : un résonateur, et un dispositif d'excitation des ondes sonores. On modélisera ici le résonateur d'une clarinette par un tube cylindrique de longueur L, ouvert à une extrémité. Le dispositif excitateur, représenté schématiquement sur la figure 1 (voir page 7), impose à l'autre extrémité du tube une relation entre la vitesse $u(x = 0)$ du gaz et la différence entre la pression p_b appliquée à l'instrument, et $p(x = 0)$ à l'entrée du résonateur. (Il s'agit concrètement d'une lame de roseau très souple, l'anche, placée dans le flux d'air entrant dans le résonateur, et susceptible de s'opposer à son passage.)

La relation entre la vitesse u et la différence de pression $\delta p = p_b - p$ dépend des caractéristiques physiques de l'excitateur. Pour un instrument réel, cette relation est proche de celle représentée sur la figure 2 (voir page 7), dont la courbe a pour équation :

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{\delta p}{p_c} - 1\right)^3 - \frac{\delta p}{p_c} + 1 \qquad \text{si} \qquad \delta p \leqslant p_c,$$

$$u = 0 \qquad \text{si} \qquad \delta p \geqslant p_c.$$

I.C.1. Calculer les caractéristiques d'un écoulement stationnaire où toutes les fonctions sont indépendantes du temps.

I.C.2. On note $p'_b = p_b - p_0$ la surpression appliquée à l'entrée de l'instrument. À partir de la figure 2, représenter, à p'_b donné, la vitesse u en fonction de la pression acoustique p' à l'entrée du résonateur (en $x = 0$).

I.C.3. On supposera, comme pour la question I.B.3., que toutes les pertes du résonateur peuvent être négligées ($\varepsilon = \varepsilon' = 0$). Utilisant le résultat obtenu alors pour des ondes monochromatiques de fréquence ω, montrer que pour toute onde acoustique périodique, si on pose $X_\pm = p' \pm Z_0 u$, on obtient en $x = 0$ la relation :

$$X_-(x = 0, t) = -X_+\left(x = 0, t - \frac{2L}{c}\right).$$

I.C.4. Utilisant la loi $u = F[p'; p'_b]$ représentée à la question I.C.2., représenter la loi suivante : $X_+(t) = G[X_-(t); p'_b]$. Comment ce graphe peut-il être utilisé pour connaître l'évolution temporelle, échantillonnée à des intervalles temporels de $\frac{2L}{c}$, des grandeurs caractérisant l'onde acoustique dans le résonateur à un instant donné ?

I.C.5. Retrouver par cette méthode la solution stationnaire de la première question. Étudier sa stabilité en fonction de la valeur de la surpression dans le bec p'_b.

I.C.6. Montrer qu'en l'absence d'une solution stationnaire stable, il existe un régime limite où X_- oscille entre deux valeurs que l'on déterminera graphiquement. Quelle est la fréquence des ondes sonores correspondantes ? Comment varie l'amplitude des oscillations de la pression acoustique en fonction de la surpression p'_b juste au-dessus du seuil d'instabilité ?

I.C.7. Que se passe-t-il si la loi liant u à δp n'est plus celle de la figure 2, mais est décrite par le graphe de la figure 3 ? (voir page 8)

I.C.8. Discuter la stabilité des régimes oscillants trouvés ci-dessus.

II.A. ÉTUDE D'UN RÉGÉNÉRATEUR

II.A.1. On met en contact thermique une masse m de gaz à une température θ_g et un réservoir thermique de masse M_R, de chaleur spécifique constante C_R, à une température θ_R. La pression étant maintenue constante, quel est l'état final du système ? On mettra la température finale θ_f sous la forme $\theta_f = (1 - \varepsilon)\,\theta_R + \varepsilon\,\theta_g$. Dans toute la suite, on supposera le système tel que $\varepsilon \ll 1$.

II.A.2. On appelle régénérateur une chaine de $N+1$ réservoirs thermiques identiques, sur lesquels se thermalise successivement une même masse m de gaz. On suppose négligeables les flux thermiques directs entre réservoirs.

Appelant $T_0, T_1, ..., T_N$ les températures des réservoirs avant le passage du gaz, de température initiale T_0, dans le sens des indices croissants, déterminer les températures $T'_0, T'_1, ..., T'_N$ après passage du gaz. En particulier, quel état initial conduit à un gradient de température uniforme $T'_k - T'_{k-1} = D$?

II.A.3. Supposant maintenant les températures $\theta_0, ..., \theta_N$ uniformément espacées d'un écart Δ, calculer les températures $\theta'_0, ..., \theta'_N$ après un passage d'une masse m de gaz.

II.A.4. Faire le bilan du passage aller et retour d'une masse m de gaz dans un régénérateur dont l'état intermédiaire correspond à un gradient uniforme de température. Comment le résultat est-il affecté par les paramètres caractéristiques N et M_R du régénérateur ?

II.A.5. Faire un bilan d'entropie pour cette transformation. Comparer la fonction du matériau employé dans un régénérateur, et dans un appareil à détente de Joule-Thomson.

II.B. LA MACHINE DE STIRLING

II.B.1. Sur la figure 4 (voir page 8) est représentée une machine constituée de deux volumes variables à températures fixes, reliés par un régénérateur du type étudié dans la partie II.A. ci-dessus, supposé idéal ($\varepsilon = 0$). Les volumes et températures sont affectés d'un indice c dans le compartiment chaud, f dans le compartiment froid (voir figure 4, page 8). La pression est supposée rester constamment uniforme, et le volume dans le régénérateur sera négligé. Faire le bilan d'un cycle dans lequel le gaz est alternativement entièrement contenu dans chaque volume, et subit une compression lorsqu'il est dans le volume chaud, et une détente lorsqu'il est dans le volume froid. On fera en particulier une étude énergétique détaillée.

II.B.2. Que devient la même machine si la compression est effectuée dans le volume froid, et la détente dans le volume chaud ? Quel est son rendement ?

II.B.3. On munit maintenant les pistons fermant les volumes chaud et froid d'un système mécanique imposant une contrainte entre V_c et V_f, qui seront de la forme :

$$V_c = V_{c0}\,[1 - \cos(\omega t)] + V_{cm}$$

$$V_f = V_{f0}\,[1 - \cos(\omega t + \varphi)] + V_{fm}$$

On supposera toujours négligeable la différence de pression pouvant résulter de l'écoulement du gaz à travers le régénérateur. Faire, sur un cycle, un bilan énergétique détaillé. Discuter en particulier l'incidence du déphasage φ sur le fonctionnement de la machine.

II.C. RÉFRIGÉRATEUR À TUBE PULSÉ

On considère maintenant la machine, représentée sur la figure 5 (page 9), construite autour d'un tube de longueur L dans lequel un gaz sera déplacé de façon alternative. Le gaz est supposé thermiquement isolé, sauf aux extrémités $x = 0$ et $x = L$ où une source froide et une source chaude maintiennent des températures T_f et T_c. À la source froide, un piston permet de déplacer le gaz. À la source chaude, une impédance I permet au gaz de s'écouler, sans perte d'énergie, entre le tube et un réservoir, avec un débit proportionnel à l'écart de pression régnant entre ces enceintes. On négligera pour simplifier le volume entre le piston et la source froide par rapport aux volumes V_T du tube et V_R du réservoir. On supposera toujours que la pression est uniforme dans le tube.

II.C.1. Montrer que la température dans le réservoir est égale à T_c. Quelles sont les conditions à respecter pour pouvoir supposer la pression p uniforme dans le tube ?

II.C.2. Écrire (comme en I.A.1.) une relation liant la masse volumique μ et la vitesse $\vec{u}$ à l'intérieur du tube, et exprimant la conservation locale de matière.

II.C.3. Écrire l'équation d'Euler pour un gaz à pression uniforme. En déduire, en utilisant le résultat précédent, une relation de conservation liant l'énergie cinétique de translation $E_c = \frac{\mu u^2}{2}$ et le courant associé, $\vec{J}_c = E_c \vec{u}$.

II.C.4. Faire un bilan local d'énergie. Utilisant la question précédente, en déduire une équation exprimant la conservation locale d'énergie, liant l'énergie interne U du gaz et le courant d'enthalpie $\vec{J}_H = H\vec{u}$ lorsque la pression est uniforme. En déduire la relation à l'intérieur du tube :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

II.C.5. Montrer que la connaissance de la vitesse aux extrémités du tube suffit à la déterminer partout.

II.C.6. On fera l'hypothèse que les déplacements du piston permettent d'imposer une vitesse en $x = 0$ assez faible pour linéariser par rapport aux écarts de la pression à sa valeur moyenne. Pour un mouvement sinusoïdal on posera :

$$u(0) = u_0 \cos(\omega t)$$

$$p = p_0 + \pi_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

où π_0 et φ sont des constantes encore indéterminées. Calculer la vitesse en tout point du tube, et en particulier en $x = L$.

II.C.7. Calculer le courant d'enthalpie J_H dans le tube ; le relier aux puissances thermiques $\dot{Q}_f$ et $\dot{Q}_c$ échangées avec les sources. Calculer sa valeur moyenne temporelle sur une période.

II.C.8. Exprimant l'effet résistif de l'impédance I entre le tube et le réservoir sous la forme $Z\,u(L) = p - p_R$, et tenant compte de la conservation globale des atomes du gaz, calculer à l'ordre le plus bas la variation temporelle de la pression p_R dans le réservoir, et de la vitesse $u(L)$. En déduire l'expression du courant moyen d'enthalpie dans le tube.

II.C.9. Pourquoi appelle-t-on le dispositif étudié un réfrigérateur à tube pulsé ? Pourquoi l'impédance I est-elle indispensable ? Comment un réfrigérateur à tube pulsé se compare-t-il à une machine de Stirling ? Comment adjoindre un régénérateur au système décrit pour éviter l'inconvénient d'un piston à basse température ?

P3

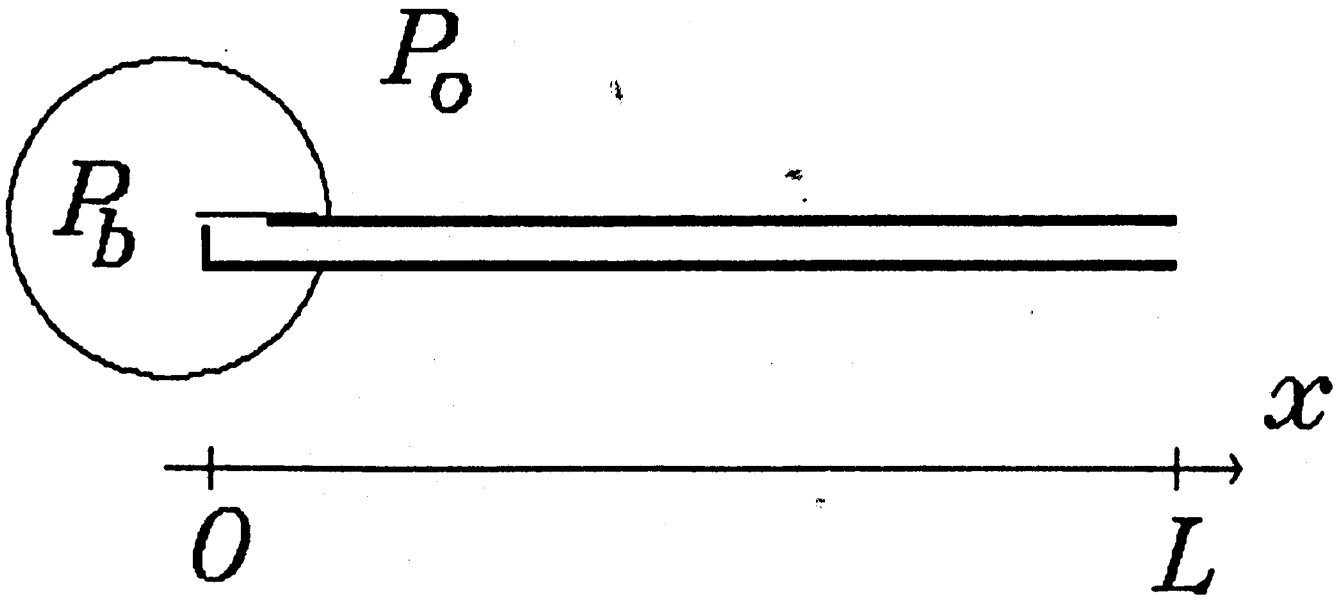

Figure 1

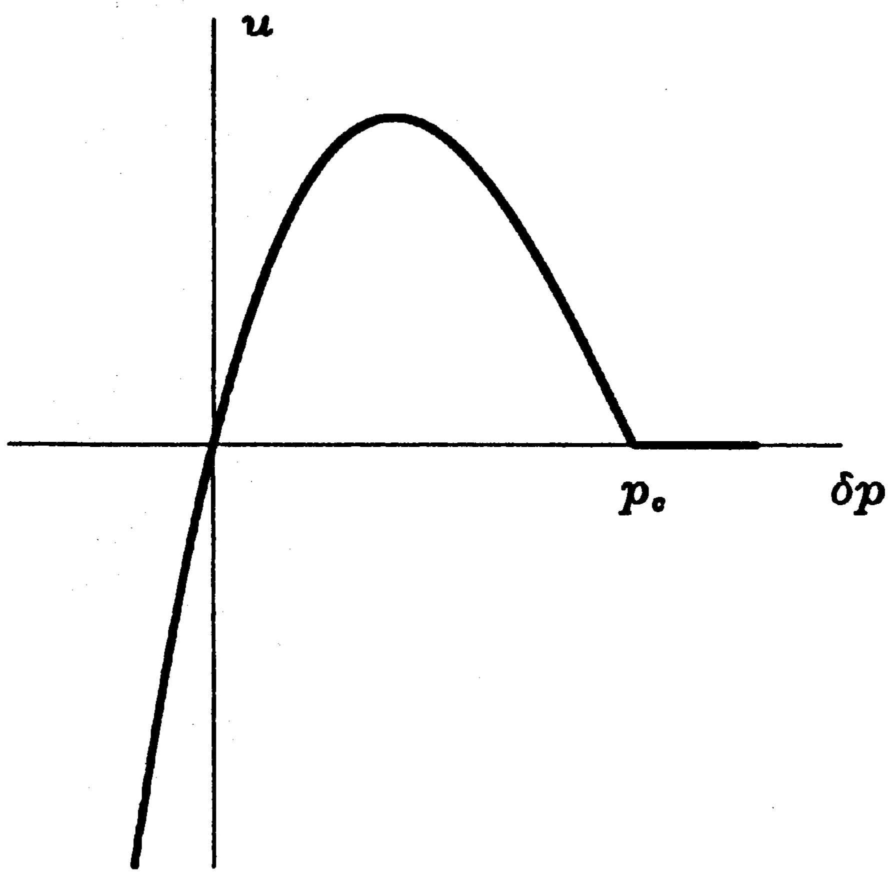

Figure 2

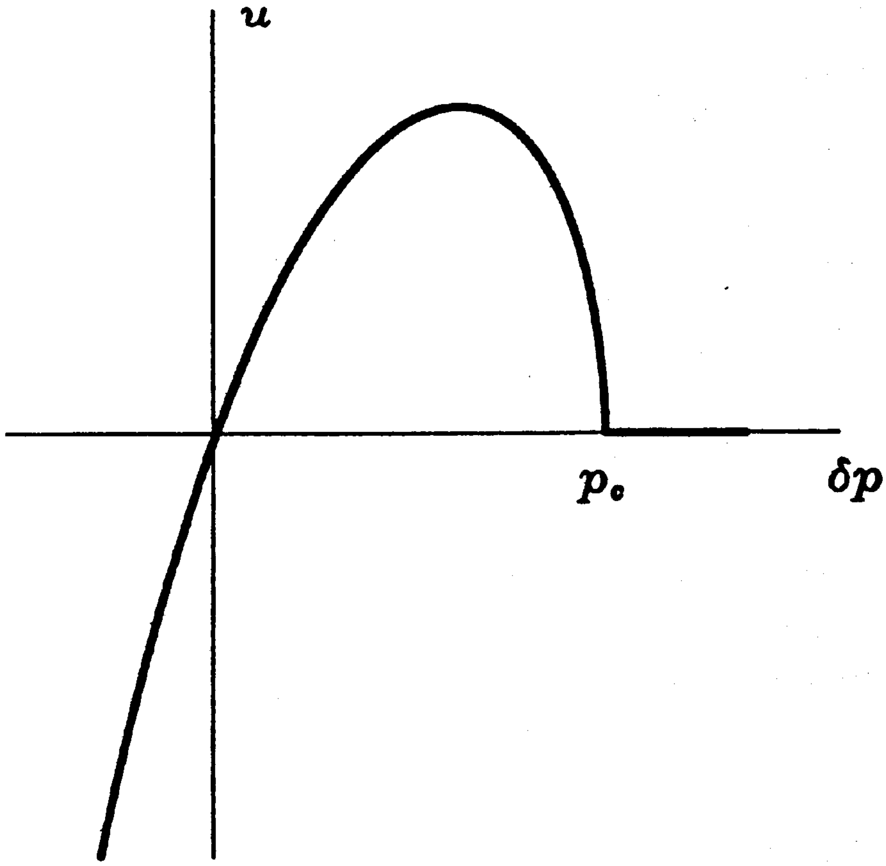

Figure 3

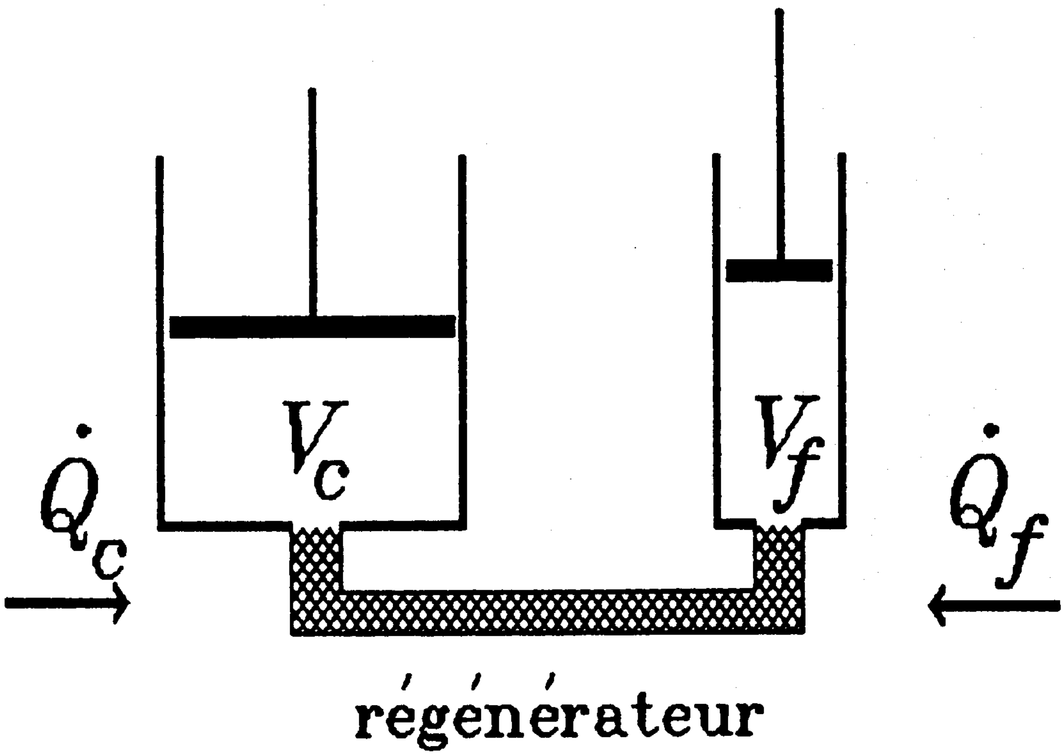

Figure 4

Figure 2

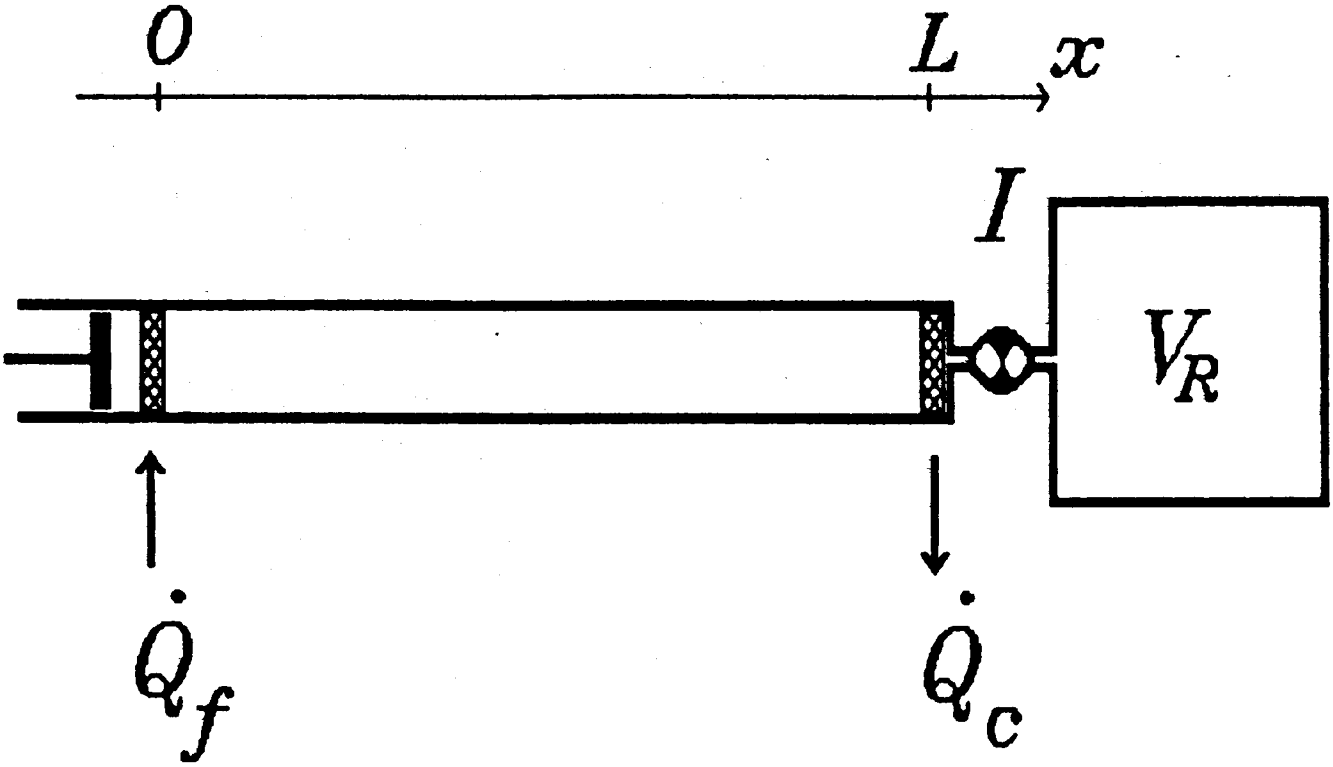

Figure 5