348 Ecole de l'Air PC/PSI option PC
Sc. physiques / chimie

Physique: Etude d'une fusée à eau.

Les candidats sont invités à lire quelques courts extraits d'un article paru dans le B.U.P.*, évoquant la fusée à eau, fusée hydropneumatique élémentaire réalisée avec une bouteille d'eau minérale en plastique.

L'épreuve propose de développer quelques aspects théoriques et de vérifier certains résultats mentionnés dans le texte.

L'un des avantages de cette fusée est d'être "physique" et non "chimique". Les calculs ne nécessitent pas la connaissance préalable d'une vitesse d'éjection de gaz à l'issue d'une combustion, les performances sont liées à des paramètres physiques accessibles à la mesure pour la plupart : masse, volume, diamètre, pression ...

* *Bulletin de l'Union des Physiciens*, mars 1991

La fusée à eau.

"Une bouteille partiellement remplie d'eau est renversée sur son bouchon qui est traversé par une valve de chambre à air de bicyclette. L'accumulation d'air comprimé au moyen d'une pompe fait "sauter" le bouchon, "chasse" l'eau et propulse la fusée ...

Quelques améliorations techniques simples (coiffe plus aérodynamique, ailerons de stabilité) permettent d'obtenir des fusées dont les performances sont surprenantes.

Caractéristiques de la fusée "standard" réalisée avec un magnum de 1,5 L en P.E.T.

m_0 *masse à vide, avec ogive et queue*	*100 g*
Φ_A *diamètre du corps*	*8,5 cm*
Φ_B *diamètre de la tuyère d'échappement*	*2 cm*
Volume total du réservoir	*1,5 L*
Hauteur	*40 cm*
Pression supportable	*jusqu'à 10 bar*
Altitude atteinte	*de l'ordre de la centaine de mètres*

Expulsion de l'eau

Dans un premier temps, on peut ne tenir compte que de la propulsion par eau et admettre que la pression à la sortie de la tuyère est pratiquement égale à celle de l'air du réservoir en décompression adiabatique ...

Ces éléments permettent de se faire une idée des performances standard : en y mettant 0,5 L d'eau et en gonflant à 6 bars, on obtient pour le départ : poussée F = 377 N, accélération a = 628 m.s^{-2} *...*

A la fin de l'éjection de l'eau on peut calculer que la pression est tombée à 3,4 bar ce qui laisse encore la poussée à 213 N ...

En prenant comme valeur "moyenne" de la pression 4,5 bar, le débit moyen serait de 9,4 kg.s^{-1}*, ce qui ferait une durée de propulsion approximativement égale à 0,053 s. En estimant l'accélération moyenne à 1000 m.s*$^{-2}$*, la vitesse finale est de 53 m.s*$^{-1}$ *environ ...*

Expulsion de l'air

L'effet de l'expulsion du reste d'air est considérable dans le résultat final, mais son calcul est plus difficile. Cette éjection d'air peut être regardée, en première approximation, comme un écoulement monodimensionnel isentropique ...
Tant que la pression dans le réservoir, où seul subsiste l'air comprimé, est supérieure à 1,89 bar (dans l'hypothèse où la pression atmosphérique extérieure P vaut 1 bar), l'écoulement se fait à la vitesse du son au niveau du goulot tuyère ...

Pour cet écoulement sonique le débit s'écrit $0{,}684 \cdot P_i \dfrac{s}{\sqrt{R\dfrac{T_i}{M}}}$ ...

Ceci permet de se rendre compte des performances observées lors du fonctionnement "à sec" de la fusée qui n'est plus que pneumatique. Ainsi pour 6 bar au départ, la poussée vaut environ 70 N ... Le débit démarre, avec l'hypothèse $T_i = 288$ *K, à 0,45* $kg.s^{-1}$*, donc une expulsion en moins de 2,5 centièmes de seconde, d'où une vitesse finale de l'ordre de 18* $m.s^{-1}$ *...*

Données numériques :

Accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$
Rayon terrestre $R_T = 6400$ km
Masse volumique de l'eau liquide $\rho = 1000\ kg.m^{-3}$
Pression atmosphérique "extérieure" $P_e = 1$ bar $= 10^5$ Pa
L'air sera assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ g.mol^{-1}$ et pour lequel $\gamma = 1{,}4$

I/ Etude mécanique.

Le mouvement de la fusée se fait selon l'axe z avec $\vec{e_z}$ vecteur unitaire de l'axe vertical orienté vers le haut. A l'instant t, la masse de la fusée est notée $m(t)$, sa vitesse est $\vec{v}(t) = v(t) \cdot \vec{e_z}$ et son accélération $\vec{a}$.

Pour tout le problème on supposera que le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme.

1) a) Quelle différence existe-t-il entre champ de pesanteur $\vec{g}$ et champ de gravitation?

b) En quel point du globe la différence entre leur norme est-elle la plus grande ? Calculer cette différence.

c) Est-il justifié de distinguer les deux champs pour les calculs relatifs à la fusée à eau ?

2) L'hypothèse de champ de pesanteur uniforme vous paraît-elle raisonnable ? On exprimera la variation relative du champ de pesanteur pour une variation d'altitude de 100 m à partir du niveau de la mer.

Dans une première approche, on néglige les frottements, la seule force extérieure est le poids.

3) Expliquer sans formalisme poussé pourquoi la fusée "avance". On soulignera de façon simple la différence existant entre une fusée et un avion (on ne choisira pas une propulsion par hélices).

4) Pourquoi ne peut-on pas écrire dans le référentiel terrestre supposé galiléen le principe fondamental $m\vec{a} = m\vec{g}$?

5) a) Etablir, en appliquant le principe fondamental entre les instants t et $t+dt$ à un système judicieusement choisi, la relation : $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g}$, avec $\vec{F} = -\mathcal{D}_m\vec{u}$ force de poussée

$\vec{u}$ est la vitesse d'éjection de fluide par rapport à la fusée et $\mathcal{D}_m = -\dfrac{dm}{dt}$.

Comment s'appelle $\mathcal{D}_m$?

b) A quelle condition la fusée décolle-t-elle à $t = 0$, instant de début d'éjection du fluide ?

Pour cette question, on suppose que $\mathcal{D}_m$ est constant et on note m_0 la masse de la fusée à vide et m_f la masse totale de fluide pouvant être éjecté. *Les expressions demandées sont les expressions littérales.*

6) a) Donner l'expression de $m = m(t)$ masse de la fusée. Quel est l'instant t_1 de fin d'éjection de fluide ? *On rappelle que le mouvement de la fusée s'effectue selon la verticale.*

b) Donner l'expression de $v = v(t)$, vitesse de la fusée selon $\vec{e_z}$ et, sous forme d'intégrale *qu'il n'est pas demandé de calculer*, la hauteur atteinte $z = z(t)$. Quelle est la vitesse maximale v_{max} atteinte? On posera $z_1 = z(t_1)$.

7) a) Pour $t > t_1$ comment s'effectue le mouvement ? Donner $v = v(t)$ et $z = z(t)$.

b) Que peut-on dire de l'énergie mécanique du système terre + fusée ? (On donnera l'expression de cette énergie mécanique). Donner en fonction de z_1 et v_{max} la hauteur maximale atteinte h_{max}.

c) Donner l'instant t_2 où la fusée atteint son apogée en fonction de t_1 et v_{max}.

8) La modélisation précédente peut-elle conduire à une valeur convenable de l'altitude maximale atteinte, ou bien faut-il prendre en compte un autre phénomène ?

II/ Etude de l'écoulement du liquide

La bouteille est formée de deux parties cylindriques de diamètre Φ_A et Φ_B (section s_A et s_B). L'eau s'écoule par la partie d'indice B, à la vitesse v_B. La masse volumique de liquide est notée ρ_A ou ρ_B.

1) a) Exprimer le débit massique d'éjection de liquide.

b) En considérant l'eau comme incompressible, et l'écoulement comme isotherme, donner la relation entre les vitesses v_A et v_B.

2) a) Rappeler l'expression de la relation de Bernoulli dans un référentiel galiléen, relation liant v, z et P (pression) et les conditions d'application de cette relation.

b) En appliquant cette relation au liquide s'écoulant dans la bouteille aux vitesses v_A et v_B , en déduire une expression de v_B^2 en fonction de $\Delta P = P_A\text{-}P_B$, $\Delta z = z_A\text{-}z_B$, Φ_A et Φ_B.

c) Montrer *numériquement* en évaluant ces termes, qu'on peut négliger le terme en Δz (par exemple pour Δz = 10 cm et $\Delta P = \Delta P_{initial}$) et la correction liée à Φ_A et Φ_B en faisant des calculs "approchés".
On indiquera la précision relative sur v_B^2 pour qu'on puisse aussi négliger la correction liée à Φ_A et Φ_B. Donner alors une formule *approchée* plus simple reliant v_B^2 et ΔP.

3) Comment avait été nommé v_B dans le I/ ? Donner, en fonction de ΔP, l'expression littérale de la poussée F et de l'accélération a.

La fusée subit une accélération très importante. La relation de Bernoulli précédemment utilisée doit être modifiée. On suppose que l'accélération $\vec{a}$ de la fusée est constante.

4) a) Comment s'écrirait la relation de Bernoulli dans le référentiel lié à la fusée ?

b) Est-il alors légitime de négliger le terme en Δz ? Application numérique : que vaudrait ce terme pour une accélération a = 50·g et un Δz =10 cm ? Pour la même valeur de ΔP peut-on négliger ce terme ?

5) Etude de l'air dans la bouteille.

a) On note P_1 la pression initiale de l'air dans la bouteille, avant éjection de l'eau. Pour les calculs on assimilera cette détente à une détente réversible.

- Pourquoi peut-on considérer que l'air dans la bouteille subit une détente adiabatique ?
- Donner l'expression de la pression P_2 dans la bouteille en fin d'éjection de l'eau et sa valeur numérique. Diffère-t-elle de la valeur du texte ?

b) On se place dans le cadre des hypothèses du II/ 2) c).

- Donner l'expression du débit massique de l'eau en fonction de ΔP, puis sa valeur en début d'éjection de l'eau et en fin d'éjection de l'eau.
- Donner de même la force de poussée et l'accélération correspondantes. Ces valeurs calculées diffèrent de celles du texte. Comment peut-on interpréter le texte, pour qu'en modifiant la valeur de la pression initiale, $P_1 = P_1'$, on retrouve les valeurs indiquées ?

On présentera les résultats numériques sous forme de tableau :

pression	débit massique	poussée	masse	accélération

c) Donner la valeur du débit massique moyen en prenant comme valeur de la pression de l'air dans la bouteille la moyenne de P_1 et P_2. Estimer ainsi la durée τ de propulsion due à l'eau et la vitesse maximale atteinte v_{max}. Conclusion ?

On présentera les résultats numériques sous forme de tableau :

P_{moy}	$\mathcal{D}_{m_{moy}}$	F_{moy}	τ	u_{moy}	v_{max}

d) Expérimentalement peut-on mettre en évidence avec un appareil photo l'aspect précédent ?

<u>III/ Expulsion de l'air</u>

Après éjection de l'eau, l'air en surpression est à son tour éjecté. On considère que l'air se comporte comme un fluide parfait et que l'écoulement est permanent et unidimentionnel.

Pour les calculs, il sera de plus assimilé à un gaz parfait.

La masse volumique de l'air sera notée μ pour la distinguer de la masse volumique ρ de l'eau. P est la pression et v la vitesse en un point de l'écoulement où la section est s.

1) Comment *expérimentalement* peut-on montrer que cet effet n'est pas négligeable ?

2) Quelle équation générale permet d'obtenir, en négligeant l'effet de forces de pesanteur, la relation :

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\frac{dP}{\mu} \qquad ❶$$

Dans quel cas pourrait-on intégrer directement cette relation ? Est-ce le cas ici ?

3) Aspect thermodynamique : montrer que l'écoulement adiabatique permanent d'un fluide parfait conduit à la relation ❷,où h est l'enthalpie massique. *On précisera soigneusement les hypothèses :*

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) + dh = 0 \qquad ❷$$

4) a) Exprimer le débit massique $\mathcal{D}_m$ en fonction de s section de l'écoulement.

b) Le principe de conservation de la masse conduit à une relation sur $\mathcal{D}_m$. Donner la relation différentielle, relation ❸, obtenue à partir de la différentielle logarithmique de $\mathcal{D}_m$.

c) Exprimer la relation ❹,reliant P, μ et T, température. On utilisera le paramètre $r = \frac{R}{M}$, avec R constante des gaz parfaits et M masse molaire de l'air.

d) Donner l'expression de dh et montrer que ces relations permettent de retrouver la loi de Laplace, exprimée avec les variables P et μ.

5) a) La célérité du son dans l'air est : $c = \sqrt{\gamma \cdot r \cdot T}$. Donner sa valeur à t=15°C, si la masse molaire de l'air est M = 29 g.mol^{-1} et R = 8.31 J.mol^{-1}.K^{-1}

On posera par la suite $\mathcal{M} = \frac{v}{c}$.Comment s'appelle ce nombre ?

b) Etablir la relation ❺, dite relation de Hugeniot : $\frac{ds}{s} + (1 - \mathcal{M}^2)\frac{dv}{v} = 0$

c) Montrer que la vitesse ne peut être égale à la célérité du son qu'en un point où la section est minimale. Comment varie cette vitesse si la section augmente ?

Pour simplifier les expressions, on considère que la vitesse v_i de l'air dans le réservoir est négligeable devant la vitesse $v_B = v$ au goulot.

6) a) On note $P = P_B$ la pression au goulot et P_i la pression dans le réservoir.

· Montrer qu'il est possible d'exprimer simplement les rapports $\frac{T}{T_i}$, $\frac{\mu}{\mu_i}$, $\frac{c}{c_i}$ en fonction de $\frac{P}{P_i}$.

· Etablir la relation ❻ entre $\mathcal{M} = \frac{v}{c}$ et $\frac{P}{P_i}$.

b) Quelle est la valeur limite de P_i, notée P_{lim}, pour que l'écoulement se fasse à la célérité du son au goulot ? Conclusion ?

On rappelle que la pression atmosphérique extérieure est égale à 1 bar.

c) Si $P > P_{lim}$, on ne peut appliquer la relation ❻ : l'écoulement est sonique au goulot et le débit égal à $\mathcal{D}_{m_{lim}}$.

Donner, avec les valeurs du texte pour le fonctionnement "à sec", la valeur numérique de $\mathcal{D}_{m_{lim}}$ et vérifier les autres valeurs numériques proposées.

· Quelle est, avec ces mêmes valeurs, la valeur initiale de la masse d'air dans la bouteille?