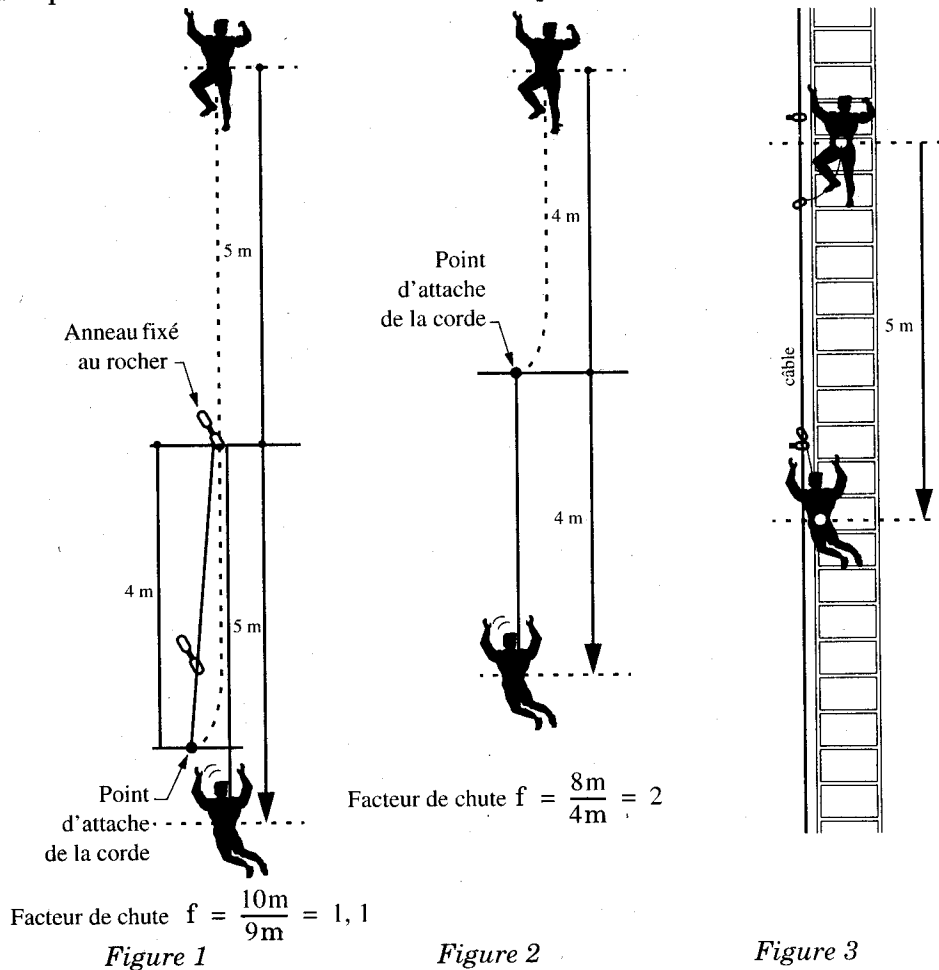


Étude de quelques propriétés d'une corde de montagne

Les parties I, II.A et II.B sont indépendantes. Certaines valeurs numériques de l'énoncé sont données dans le système international d'unités (SI). Le candidat doit par contre donner ses résultats numériques avec les unités légales.



Partie I - Mécanique - Étude de la chute d'un alpiniste

Lors d'une escalade, un grimpeur s'assure en passant sa corde dans des anneaux métalliques fixés au rocher. La corde peut coulisser librement dans ces anneaux. Le facteur de chute f est défini comme le rapport de la hauteur de chute tant que la corde n'est pas tendue sur la longueur L de corde utilisée. Si au moment de la chute la corde est tendue, ce facteur de chute vaut $f = 2l/L$ (figures 1 et 2) où l est la distance du grimpeur au dernier anneau. Dans des conditions normales d'utilisation f est compris entre 0 et 2. Pour les applications numériques, le poids P du grimpeur sera pris égal à 800 N.

I.A - Étude d'une corde "dynamique"

Le maillon fragile dans la chaîne d'assurance d'un grimpeur n'est pas la corde (qui peut résister à des forces de plus de 18 kN), ni les points où la corde est attachée au rocher (résistance de l'ordre de 20 kN) mais le grimpeur (une force de 12 kN exercée sur le bassin provoque sa rupture)! Les cordes utilisées en escalade sont élastiques de façon à diminuer la force qui s'exerce sur le grimpeur lors de sa chute. Nous assimilerons une corde de montagne dont la longueur utilisée est L à un ressort de longueur à vide L et de raideur $k = 1/\alpha L$. α élasticité de la corde est une grandeur caractéristique du matériau la constituant.

I.A.1) Soit un ressort vertical de raideur k et de longueur à vide L auquel est suspendue une masse m , de poids $P = mg$ (g désignant le module du champ de pesanteur). À l'instant $t = 0$, le ressort est non tendu et m a une vitesse verticale, dirigée vers le bas, de module v_0 . Déterminez l'élongation maximale du ressort x_{max} (mesurée à partir de la longueur à vide) et la force maximale F_{max} qu'il exerce sur la masse m .

I.A.2) En utilisant le résultat de la question I.A.1), exprimez la force maximale F_{max} exercée par la corde lors d'une chute de facteur f en fonction des données de l'énoncé. Que remarquez-vous ?

I.A.3) Le corps humain peut résister à une force de l'ordre de 12 kN pendant un temps bref.

a) Une corde d'escalade est prévue pour que la force maximale exercée sur l'alpiniste soit de 9 kN dans les conditions les plus défavorables ($f = 2$).

- i) Calculez l'élasticité de cette corde (préciser les unités de α).
- ii) Calculez l'élongation maximale de cette corde et la force maximale pour $L = 10\text{m}$, $f = 1$.
- iii) Qu'en est-il pour la figure 3 où la hauteur de chute est de 5m et la longueur de la longe (corde à laquelle est accroché le grimpeur) est de 1m ?

b) L'étude précédente ne tient pas compte des phénomènes dissipatifs se produisant dans la corde. L'élongation de la corde est en fait inférieure à celle calculée avec le modèle choisi. La corde ne se comporte pas comme un ressort. Supposons que pendant toute la durée du freinage par la corde, elle s'allonge de façon à maintenir à 9kN la force qu'elle exerce sur le grimpeur. Calculez son élongation maximale pour $L = 10\text{m}$, $f = 1$ puis $L = 1\text{m}$, $f = 5$.

c) Une corde utilisée en spéléologie est dite statique car son élasticité est faible (environ $5 \times 10^{-6} \text{SI}$). En revenant au modèle d'une corde parfaitement élastique, à partir de quel facteur de chute, y a-t-il danger de mort avec une telle corde ?

I.B - Influence du frottement au niveau des points d'assurance

Nous avons fait l'hypothèse que la corde couissait sans frottement dans les anneaux. Ce n'est en fait pas le cas. La corde glisse avec frottement et à vitesse constante sur l'anneau supposé à section cylindrique (figure 4). Nous poserons f_d coefficient de frottement dynamique de la corde sur l'anneau.

I.B.1)

a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à l'élément de longueur de corde $Rd\phi$, trouvez une équation différentielle que vérifie la tension $T(\phi)$ en un point de la corde. En déduire une relation entre $T(0)$ et $T(\phi)$ (figure 4).

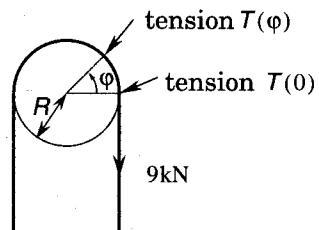


Figure 4

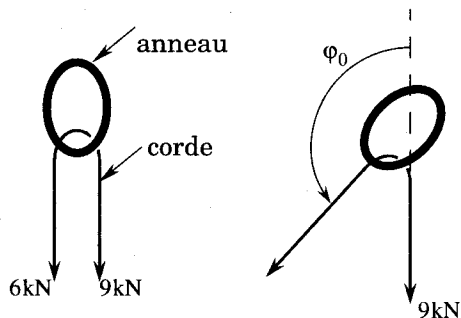


Figure 5

b) Calculez f_d et $T(\frac{\pi}{2})$ sachant que $T(\pi) \approx 6\text{kN}$ pour $T(0) = 9\text{kN}$.

I.B.2) Les valeurs numériques données dans la question précédente seront utilisées dans les questions suivantes.

a) Dans le cas d'un renvoi vers le bas (figure 5), la force totale exercée sur l'anneau vaut 15kN. Un anneau résistant à 20kN est suffisant pour assurer la sécurité du grimpeur. Calculez cette force si le renvoi s'effectue sous un angle ϕ_0 ($\phi_0 < \pi$) ? On exprimera cette force en fonction de $T(0)$, f_d et ϕ_0 . L'anneau résiste-t-il ?

b) Dans le cas de la figure 6, les deux points d'ancrage à la disposition du grimpeur sont peu sûrs. Ils ne résistent pas à une force supérieure à 10kN. Il utilise alors une sangle, de poids négligeable, résistant à 22kN pour relier ces deux points. Quel est le meilleur choix de longueur de sangle : 60cm ou 1m. Justifiez quantitativement la réponse.

I.B.3) Le frottement de la corde sur l'anneau modifie la façon dont s'allonge la corde. Déterminez l'élongation ΔL de la corde (longueur au repos L) soumise à une force F (figure 7), le point où est situé l'anneau est à une hauteur h au-dessus du point d'attache de la corde. Calculez la grandeur $\alpha' = \Delta L / FL$. Donnez sa signification physique et tracez la courbe α' / α en fonction de h/L pour $F = 9\text{kN}$. Quelle conclusion tirez-vous de cette étude ?

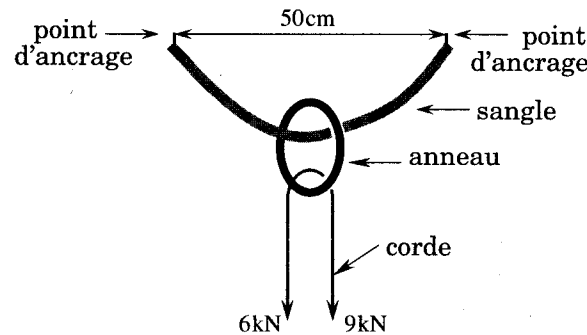


Figure 6

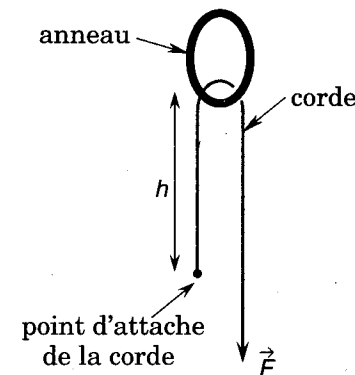


Figure 7

Partie II - Thermodynamique - Échauffement du "descendeur" lors d'un "rappel"

Un rappel est l'opération consistant à descendre le long d'une corde utilisée en double de façon à pouvoir la "rappeler" quand le grimpeur a terminé sa descente. Un rappel dure en général quelques minutes.

Nous admettrons les points suivants : le grimpeur descend à vitesse constante v le long de la corde ; la totalité de l'énergie potentielle de pesanteur est dissipée

sous forme de chaleur au niveau d'une pièce métallique appelée descendeur qui frotte sur la corde. Si dQ/dt est la quantité de chaleur créée par unité de temps par les frottements au niveau du descendeur, $dQ/dt = Pv$ où P représente le poids de l'alpiniste et v sa vitesse de descente.

II.A - Étude du régime transitoire

Le demi espace $x > 0$ est rempli d'un milieu homogène de masse volumique μ et de capacité calorifique massique c initialement à la température T_0 (figure 8).

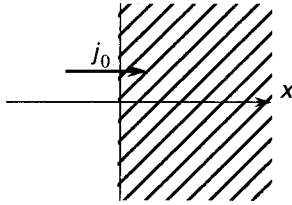


Figure 8

À partir de l'instant $t = 0$, une densité de courant de chaleur par unité de surface $j_0 = j_0 \vec{i}$ pénètre dans ce matériau sur toute la surface $x = 0$. Les différentes grandeurs étudiées ne dépendent que du temps et de la variable x . Nous appellerons $T(x, t) = T_0 + \Delta T(x, t)$ la température aux points d'abscisse x et $\vec{j} = j(x, t) \vec{i}$ la densité de courant de chaleur.

Il est rappelé que $\text{div} \vec{j} + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ (relation 1) et $\vec{j} = -K \overrightarrow{\text{grad}} T$ (relation 2).

Pour les applications numériques, nous choisirons $\mu = 8000 \text{SI}$, $c = 500 \text{SI}$, $K = 100 \text{SI}$, $j_0 = 10^6 \text{SI}$.

II.A.1)

- a) Démontrez la relation 1 dans le cas où les différentes grandeurs ne dépendent que du temps et de la variable x .
- b) Justifiez le signe - dans la relation 2.
- c) Donnez les unités de μ , c , K et $j(x, t)$.

II.A.2) Donnez l'équation différentielle vérifiée par $j(x, t)$ et celle vérifiée par $T(x, t)$.

II.A.3) Appelons $F(X)$ la fonction : $F(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$. La valeur de $F(0)$ est $F(0) = 1$.

- a) Vérifiez que

$$F(x, t) = F\left(\sqrt{\frac{\alpha x^2}{t}}\right), (x > 0)$$

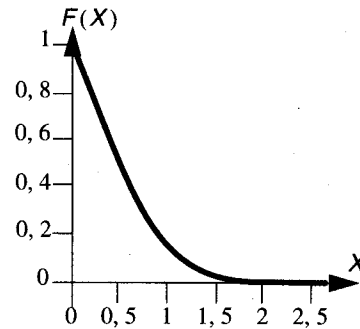
est solution d'une (ou des deux) équation(s) différentielle(s) de A.2). Explicitez α en fonction de μ , c , K et vérifiez son homogénéité.

- b) Vérifiez que $\alpha \approx 10^4 \text{SI}$

II.A.4)

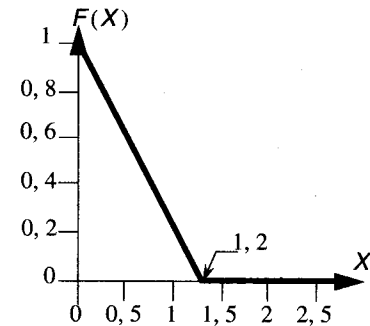
- a) Donnez en les justifiant les valeurs de $j(x, 0)$ et $T(x, 0)$ pour $x \neq 0$, de $\lim_{x \rightarrow \infty} j(x, t)$ et de $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x, t)$.
- b) Justifiez que $j(x, t) = j_0 F(x, t)$.

II.A.5) La figure 9 donne l'allure de la courbe $F(X)$. Nous assimilerons dans toute la suite, cette courbe à la courbe composée de segments de droite tracée figure 10.



Tracé de $F(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$

Figure 9



Forme approximée de $F(X)$

Figure 10

En utilisant la forme simplifiée de $F(X)$, tracez les courbes $j(x, 1s)$, $j(x, 5s)$, $j(x, 10s)$ pour x variant de 0 à 5cm.

II.A.6) En utilisant la forme simplifiée de $F(X)$ et la relation 2 :

- a) Déterminez $T(x, t)$.
- b) Calculez $\Delta T(0, t)$ pour $t = 1s$, $t = 5s$, $t = 10s$ et tracez les courbes $\Delta T(x, 1s)$, $\Delta T(x, 5s)$, $\Delta T(x, 10s)$ pour x variant de 0 à 5cm.

II.A.7) Le descendeur utilisé a une épaisseur de 1 cm. Quel temps caractéristique pouvez-vous associer à l'étude de son échauffement ? Quelle conclusion tirez-vous de sa valeur numérique ?

II.B - Échanges de chaleur avec l'extérieur

Nous supposons dans la partie suivante que le descendeur a, à chaque instant, une température uniforme T_d . Sa masse sera notée m_d avec $m_d = 100\text{g}$, sa capacité calorifique massique c_d avec $c_d = 500\text{SI}$.

La valeur initiale de T_d est égale à la température extérieure est T_0 . Nous rappelons que pour les applications numériques, le poids P de l'alpiniste est pris égal à 800N . La température extérieure, mesurée en degrés Celsius est égale à 20°C . La gaine d'une corde de montagne fond dès que sa température atteint 120°C .

II.B.1) Supposons qu'il n'y ait aucun échange de chaleur entre le descendeur et l'extérieur.

- Donnez sa température en fonction de la hauteur h descendue par l'alpiniste.
- Application numérique : $h = 50\text{m}$ (hauteur classique). Conclusion ?

II.B.2) Dans cette question, nous allons tenir compte des transferts de chaleur du descendeur vers la corde. Nous supposons que le temps de passage de la corde dans le descendeur est suffisant pour que la température de la corde à la sortie du descendeur soit T_d alors qu'à l'entrée, elle est de T_0 . Nous négligeons tout phénomène de transport de chaleur le long de la corde. Posons c_c la chaleur massique de la corde ($c_c = 20\text{SI}$) et λ_c sa masse linéique ($\lambda_c = 100\text{g/m}$).

- En précisant le bilan énergétique que vous effectuez, déterminez l'équation différentielle vérifiée par la température du descendeur.
- Déterminez et donnez la valeur numérique (pour $v = 0,5\text{m/s}$ et $v = 2\text{m/s}$) de la température limite du descendeur et du temps caractéristique relatif à son échauffement.
- Justifiez le fait que la température limite du descendeur est indépendante de la vitesse de descente.
- Déterminez la température finale du descendeur pour un rappel de 50m effectué à $0,5\text{m/s}$ et à 2m/s . Que remarquez-vous ? Justifiez le résultat.

II.B.3) Dans cette question, nous allons tenir compte des seuls échanges de chaleur du descendeur avec l'air ambiant. Ces échanges sont caractérisés par

une densité de courant de chaleur dirigée du descendeur vers l'air de flux total à travers toute sa surface $\phi = K_d(T_d - T_0)$ ($K_d = 8\text{SI}$).

- Donnez l'équation différentielle vérifiée par T_d .
- Déterminez et donnez la valeur numérique (pour $v = 0,5\text{m/s}$ et $v = 2\text{m/s}$) de la température limite du descendeur et du temps caractéristique relatif à son échauffement.
- Déterminez la température finale du descendeur pour un rappel de 50m effectué à $0,5\text{m/s}$ et à 2m/s . Conclusion ?

II.B.4) En tenant compte des deux phénomènes étudiés en B2) et B3) :

- Déterminez la température limite du descendeur et le temps caractéristique relatif à son échauffement.
- Tracez la courbe représentant la température du descendeur après un rappel de 50m , en fonction de la vitesse v du grimpeur, pour des vitesses de descente inférieures à 5ms^{-1} .
- Quelle valeur maximale de la vitesse de descente assure que la gaine de la corde ne fonde pas ($T_{\text{finale}} < 120^\circ\text{C}$) ?

••• FIN •••
