

Partie I - Bobines toriques à noyaux ferromagnétiques

On considère un tore, de section  $S$ , réalisé dans un matériau ferromagnétique et dont la longueur du cercle moyen a pour valeur  $\ell$ . On admettra dans tout le problème que  $S \ll \ell^2$ . Sur ce tore on enroule régulièrement  $N$  spires jointives de fil de cuivre et on alimente cet enroulement par un générateur de tension continue de force électromotrice réglable, permettant de faire évoluer le courant  $I$  sur l'intervalle  $[-I_{max}, I_{max}]$  (cf. figure 1). On suppose par ailleurs qu'un dispositif de mesure approprié permet de mesurer la valeur du champ magnétique dans le matériau ferromagnétique.

**I.A** - En supposant que le champ magnétique est uniforme dans une section droite du tore, déterminer l'expression de l'excitation magnétique  $H$  en fonction de  $\ell$ ,  $N$ ,  $I$  et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. On justifiera en particulier avec soin la direction et le sens de  $H$  dans le matériau magnétique.

**I.B** -

**I.B.1)** Le matériau ferromagnétique n'ayant jamais subi au préalable d'aimantation, quelle est l'allure de la courbe de première aimantation  $B = f(H)$  reliant les modules des champs  $B$  et  $H$ , obtenue lorsque l'on fait croître  $I$  de manière monotone depuis la valeur 0 jusqu'à la valeur  $I_{max}$  ?

**I.B.2)** Quel phénomène met-on en évidence lorsque  $I_{max}$  prend des valeurs de plus en plus importantes ?

**I.B.3)** Après avoir effectué l'expérience de la question I.B.1, on fait décroître  $I$  de manière monotone de  $I_{max}$  jusqu'à  $-I_{max}$ , puis à nouveau croître de manière monotone de  $-I_{max}$  à  $I_{max}$ . Quelle est l'allure de la courbe  $B = f(H)$  que l'on obtient ? Pourquoi est-il important de faire varier  $I$  de manière monotone ?

**I.C** - On alimente maintenant le bobinage par une source de tension sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $E_{max}$ . On négligera la chute de tension dans la résistance interne  $R_g$  du générateur. Montrer que le flux du champ magnétique  $\vec{B}$  dans le tore est nécessairement sinusoïdal, mais qu'il n'en est pas toujours de même pour le courant  $I$  qui circule dans cette bobine.

**I.D** - On place sur le tore un deuxième bobinage comportant  $n$  spires et on recueille la tension  $v$  aux bornes de ce bobinage, lorsque le premier bobinage est alimenté par une tension sinusoïdale. Proposer un montage simple permettant de visualiser au moyen d'un oscilloscope la variation du module du champ magnétique  $B$  en fonction du module de l'excitation magnétique  $H$ . Vous expliquerez les choix que vous avez faits en donnant des ordres de grandeur réalistes pour les différents composants choisis pour faire cette expérience en supposant que la fréquence utilisée est 50 Hz.

**I.E** - Quelles sont les origines des pertes énergétiques dans les milieux magnétiques en régime dynamique ? Comment varient-elles en fonction de la fréquence des signaux appliqués ?

**I.F** - Lorsqu'on veut travailler à fréquence élevée doit-on plutôt utiliser un matériau en ferrite ou en acier ? Quel est l'intérêt du feuilletage des tôles ? Comment doit-il être réalisé si on veut qu'il soit efficace ?

**I.G** -

**I.G.1)** Définir les notions de champ magnétique rémanent et de champ coercitif.

**I.G.2)** Le premier bobinage, ou bobinage primaire, étant alimenté comme indiqué au I.C, que représente la puissance absorbée par ce bobinage primaire, le circuit secondaire étant ouvert ? Pourquoi peut-on en général considérer que la puissance dissipée par effet Joule est faible dans cette expérience ?

**I.G.3)** Dans les conditions du I.C, le courant  $I$  qui circule dans le bobinage primaire peut être décomposé en série de Fourier. Montrer que la puissance  $P$  absorbée ne fait intervenir qu'un seul harmonique du courant.

**I.H** - On considère maintenant le tore précédent mais pour lequel on a effectué une coupure d'épaisseur  $e$  dans le matériau ferromagnétique (cf. figure 2). On supposera  $e \ll \ell$ . On réalise à nouveau un bobinage de  $N$  spires jointives régulièrement réparties comme précédemment. Cette bobine est à nouveau alimentée sous une tension continue  $E$  et il circule un courant  $I$  dans la bobine. On admettra que la coupure ne modifie pas les lignes de champ décrites en I.A, bien qu'une partie de celles-ci ne soit plus maintenant dans le milieu ferromagnétique.

**I.H.1)** Montrer que le module du champ magnétique  $\vec{B}$  est le même dans le milieu ferromagnétique et dans l'entrefer. Exprimer  $B$  en fonction de  $N$ ,  $I$ ,  $\ell$ ,  $e$ ,  $\mu_0$ , et  $\mu$  perméabilité magnétique absolue du matériau ferromagnétique.

**I.H.2)** On définit la perméabilité apparente  $\mu_a$  du tore coupé, comme celle d'un tore de longueur moyenne  $\ell$ , ne comportant pas d'entrefer, qui avec le même bobinage parcouru par le même courant, créerait le même champ magnétique. Calculer  $\mu_a/\mu_0$  en fonction de  $\mu/\mu_0$ ,  $\ell$  et  $e$ . Faire l'application numérique pour :  $\ell = 4,5\text{ cm}$  ;  $e = 0,4\text{ mm}$  ;  $\mu/\mu_0 = 2 \times 10^3$ . Que devient  $\mu_a/\mu_0$  si  $\mu/\mu_0 \rightarrow \infty$  (milieu magnétique parfait) ? Comparer l'inductance propre du tore avec entrefer et du tore sans entrefer de perméabilité  $\mu_a$  (tore équivalent).

**I.H.3)** Montrer que le système électromagnétique formé du tore avec entrefer peut être modélisé par le schéma bloc de la figure 3, où  $S$  est la section du tore et  $\Phi$  le flux à travers une spire. On précisera les grandeurs représentées par  $x$ ,  $y$  et  $z$ .

I.H.4) Calculer la fonction de transfert  $y/l$ . Quelle est sa signification ? Comment peut-on interpréter l'effet d'un entrefer dans un circuit magnétique, compte tenu de ce schéma bloc ?

I.H.5) Quelle est l'influence de la présence d'un entrefer sur les non linéarités des milieux ferromagnétiques ?

I.H.6) Dans la suite du problème on choisit un tore en alliage ferro-nickel dont la valeur du champ coercitif est faible. Quel est l'intérêt d'un tel choix ?

### Partie II - Sonde à effet Hall

La mesure du champ magnétique peut être faite en plaçant dans l'entrefer une sonde à effet Hall alimentée par une source de courant continu  $I_0$ . Nous allons dans cette deuxième partie étudier le fonctionnement de cette sonde et donner quelques unes de ses caractéristiques.

II.A - Un ruban conducteur (cf. figure 4) de largeur  $a$  et d'épaisseur  $b$  est parcouru dans le sens de la longueur par un courant d'intensité  $I_0$ . En l'absence de champ magnétique appliqué, la densité volumique de courant est uniforme  $\vec{j} = (I_0/ab)\vec{e}_x$ . On applique au ruban un champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ ; on admet que la répartition du courant reste la même (c'est-à-dire que les lignes de courant ne sont pas modifiées). Montrer qu'il apparaît une différence de potentiel  $V_H$  (tension de Hall) entre deux points de même abscisse  $x$  situés sur les bords opposés du ruban. Exprimer  $V_H$  en fonction de  $B$ ,  $I_0$ ,  $b$  et d'une constante  $R_H$  que l'on explicitera en fonction du nombre  $n$  de porteurs libres de charge  $q$ , par unité de volume. Indiquer avec soin la définition algébrique de  $V_H$  que vous choisirez. Quel est le signe de  $R_H$  ?

#### II.B -

II.B.1) Dans le cas du cuivre, l'effet est faible puisque l'on observe pour  $B = 1\text{T}$ ,  $I_0 = 1\text{A}$  et  $b = 0,1\text{mm}$ ,  $V_H = 1\mu\text{V}$ . Calculer dans ce cas l'ordre de grandeur de  $R_H$ .

II.B.2) Toujours dans le cas du cuivre nous admettrons que les porteurs libres sont des électrons, et que chaque atome de cuivre donne un électron libre. Évaluer l'ordre de grandeur de la constante de Hall  $R_H$  avec : masse molaire atomique du cuivre  $A = 63,5 \times 10^{-3}\text{kg}$ , masse volumique du cuivre  $\rho = 8,96 \times 10^3\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , nombre d'Avogadro  $N = 6,02 \times 10^{23}\text{mol}^{-1}$ ,  $q = 1,6 \times 10^{-19}\text{C}$ .

Ce modèle est-il compatible avec la valeur trouvée précédemment ?

II.B.3) On remplace le cuivre par un matériau semi conducteur. Expliquer pourquoi l'effet Hall est beaucoup plus important.

II.C - On suppose maintenant que  $a \gg b$  (le ruban est assimilé à une plaque de faible épaisseur  $b$ ) et on considère donc que le problème est bidimensionnel. Cette plaque est placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme perpendiculaire à sa surface :  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ . Afin de tenir compte de l'influence (négligée jusqu'à présent) de  $\vec{B}$  sur les lignes de courant, la loi d'Ohm ( $\vec{j} = \gamma\vec{E}$  en l'absence de champ  $\vec{B}$ ) est remplacée par la relation  $\vec{j} = \gamma\vec{E} - \gamma R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$ ;  $\gamma$  étant la conductivité du matériau,  $\vec{E}$  le champ électrique et  $R_H$  la constante de Hall définie précédemment. On négligera le champ magnétique propre créé par les porteurs eux-mêmes.

II.C.1) Interpréter la présence du terme supplémentaire dans la loi d'Ohm modifiée.

II.C.2) Montrer que les lignes de courant font un angle constant  $\theta_H$  avec les lignes de champ électrique  $\vec{E}$ . Calculer  $\theta_H$  en fonction de  $R_H$ ,  $\gamma$  et  $B$ .

II.C.3) Montrer que pour le cuivre  $\theta_H$  est négligeable. On prendra  $\gamma_{\text{cuivre}} = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ . Qu'en est-il pour un matériau semi conducteur, dont la constante de Hall est  $10^{10}$  fois plus grande que celle du cuivre avec  $\gamma_{\text{semi-conducteur}} = 1 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ .

II.D - On étudie un régime permanent. Montrer que  $\vec{E}$  et  $\vec{j}$  vérifient respectivement deux équations locales identiques. (On rappelle que le champ  $\vec{B}$  qui intervient dans la loi d'Ohm modifiée est le champ extérieur, c'est-à-dire créé par des courants extérieurs à la plaque. On rappelle les relations suivantes d'analyse vectorielle :

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b},$$

$$\text{rot}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \text{ div} \vec{b} - \vec{b} \text{ div} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \text{grad})(\vec{a}) - (\vec{a} \cdot \text{grad})(\vec{b}).$$

En déduire que le potentiel scalaire  $V$  et le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  vérifient les équations  $\Delta V = 0$  et  $\Delta j = 0$ . On rappelle que :

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a}.$$

II.E - On rappelle que les lignes de courant font un angle avec les lignes de champ électrique (II.C.2) cet angle ne dépend que de  $B$ .

II.E.1) Montrer que si on impose les conditions aux limites pour le potentiel scalaire  $V$ , la présence du champ magnétique ne modifie pas les lignes de champ électrique, mais que les lignes de courant sont modifiées.

II.E.2) Montrer au contraire que si on impose les conditions aux limites en ce qui concerne la répartition du courant (c'est-à-dire  $\vec{j}$ ) alors les lignes de courant ne sont pas modifiées par la présence du champ magnétique, mais que par contre les lignes de champ électrique seront modifiées.

II.F - On se propose d'appliquer l'étude précédente au ruban de la figure 4. Ce ruban est parcouru par un courant de vecteur densité de courant uniforme et parallèle à ses bords  $\vec{j} = (I_0/ab)\vec{e}_x$  en l'absence de champ magnétique. On le place dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{e}_y$ .

II.F.1) Montrer que  $\vec{j}$  reste tangent aux bords du ruban. Que peut-on dire des conditions aux limites de  $\vec{j}$  en présence et en absence du champ  $\vec{B}$ . En déduire que les lignes de champ  $\vec{E}$  font un angle  $\theta_H$  avec l'axe ( $Ox$ ) du ruban.

II.F.2) Retrouver l'expression de la différence de potentiel  $V_A - V_C$  qui apparaît entre les deux points  $A$  et  $C$  situés sur les deux bords différents du ruban avec  $AC$  perpendiculaire à l'axe  $Ox$  du ruban.

II.F.3) Quelle est la tension entre deux points  $C$  et  $C'$  situés d'un même côté du ruban et distants de  $h$  ( $h = x_{C'} - x_C$ ). En déduire la tension  $V_H = V_A - V_C$  entre deux points appartenant à deux côtés différents du ruban, mais d'abscisse légèrement différente  $h \neq 0$ . Quel dispositif supplémentaire doit-on prévoir pour que la tension délivrée par cette sonde soit proportionnelle à  $B$  ?

Partie III - Mesure de courants forts

La mesure d'un courant fort  $i$  circulant dans un circuit  $C$ , sans perturber ce dernier, est facilitée par la création, dans un autre circuit isolé de  $C$ , d'un courant  $I$ , "image" de  $i$  mais beaucoup plus faible. On utilise pour cela un tore identique à celui étudié dans la partie I dans l'entrefer duquel on place une sonde à effet Hall, identique à celle de la partie II, avec  $b < e$ . La perméabilité magnétique de la sonde est assimilable à  $\mu_0$  perméabilité du vide. Le courant  $i$  à étudier circule dans les  $n$  spires bobinées sur le tore ( $n$  peut se réduire à 1). Le courant "image"  $I$  circule dans un deuxième circuit comprenant  $N$  spires également bobinées sur le tore. La sonde, alimentée par un courant continu  $I_0$  permet, pour toute valeur de  $i$  d'asservir  $I$  à la valeur qui annule  $B$  dans l'entrefer. Les courants  $i$  et  $I$  sont ainsi liés.

**III.A** - Pour alimenter la sonde et pouvoir régler le courant  $I_0$ , on réalise un montage utilisant un amplificateur opérationnel supposé idéal (cf. figure 5). Exprimer le courant  $I_0$  en fonction de  $E$  et de  $R_1$ . La résistance ohmique de la sonde modifie-t-elle le courant  $I_0$ ? Comment se comporte le montage ainsi réalisé pour alimenter la sonde?

**III.B** - Montrer qu'un choix convenable du courant image  $I$  permet d'annuler le champ  $B$  dans l'entrefer, lorsqu'on fait circuler un courant  $i$  dans le circuit de mesure (on supposera négligeable le champ magnétique rémanent).

**III.B.1** Exprimer le courant image  $I$  en fonction de  $i$ ,  $N$  et  $n$  lorsque  $B = 0$ .

**III.B.2** Montrer qu'un choix convenable de l'orientation algébrique des deux bobinages permet d'obtenir deux intensités  $i$  et  $I$  de même signe.

**III.B.3** Comment choisir  $n$  et  $N$ ?

**III.C** - L'annulation du champ  $B$  est observée à l'aide de la sonde à effet Hall précédente et permet d'asservir le courant image  $I$  au courant à étudier  $i$ , de façon que, pour toute valeur du courant à étudier  $i$ , on puisse créer un courant image  $I$  tel que le champ  $B$  soit toujours nul dans l'entrefer.

**III.C.1** Exprimer cette tension  $V_H$  lorsque circule, dans le bobinage de  $n$  spires, le courant à étudier  $i$  et, dans le bobinage de  $N$  spires, un courant  $I$ . Montrer que l'on peut écrire  $V_H = K\varepsilon$  avec  $\varepsilon = ni - NI$ . On précisera l'expression de  $K$ .

**III.C.2** Comment se modifie le résultat précédent lorsque la tension délivrée par la sonde n'est pas nulle pour  $B = 0$ ?

**III.C.3** Quelle modification entraîne l'existence d'un champ rémanent non nul?

**III.C.4** En conclusion, quelle serait l'expression de la tension  $V_H$  délivrée par la sonde si on tenait compte de ces diverses imperfections?

**III.D** - La tension  $V_H$  est utilisée pour asservir le courant image  $I$  au courant  $i$  à étudier. Or  $V_H$  est très faible. Une amplification de  $V_H$  est donc indispensable. Le schéma de l'amplificateur est indiqué (cf. figure 6). Calculer le gain du montage  $A_1 = V_2/V_H$ . On supposera les amplificateurs opérationnels idéaux.

**III.E** - L'existence d'une tension résiduelle non nulle lorsque le flux de  $B$  est nul, conduit à prévoir un dispositif de compensation. Cette tension résiduelle étant continue, on réalise une source de tension variable, associée à une structure différentielle permettant

d'obtenir une tension de sortie  $V_S$  nulle lorsque le courant à étudier  $i$  est nul, ainsi que le courant image  $I$ . Le montage est indiqué sur la figure 7.  $P$  est un potentiomètre permettant de faire varier le potentiel de la borne + de l'amplificateur opérationnel qui lui est directement relié. On note  $P$  la résistance totale du potentiomètre,  $xP$  la résistance reliée à la borne  $-E$  par l'intermédiaire de  $R_S$  et  $(1-x)P$  celle reliée à la borne  $+E$  par l'intermédiaire d'une autre résistance  $R_S$ ,  $x$  est un réel appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$ .

**III.E.1** Déterminer la tension  $V_0$  en fonction de  $R_S$ ,  $P$ ,  $x$  et  $E$ .

**III.E.2** Exprimer la tension de sortie  $V_S$  en fonction de  $V_2$  et de  $V_0$  puis en fonction de  $V_H$  et de  $V_0$ . (On rappelle que  $V_2$  est la tension de sortie du montage de la figure 6).

**III.E.3** Montrer que lorsqu'on fait varier  $x$  on peut annuler la tension de sortie lorsque  $i = I = 0$ , même si l'on tient compte des imperfections du convertisseur. Quelle condition faut-il imposer aux différents composants pour qu'il en soit ainsi? Montrer que l'on peut alors écrire  $V_S = AK\varepsilon$ . Préciser l'expression de  $A$ .

**III.E.4** Expliquer pourquoi le montage ainsi réalisé ne peut pas être utilisé pour alimenter la bobine de  $N$  spires ( $N$  est au plus égal à 500 spires), le courant à étudier  $i$  pouvant atteindre 100A par exemple.

**III.F** - Dans la pratique, un montage ( $M$ ), que nous n'étudions pas alimente le bobinage de  $N$  spires (résistance  $R_B$ ) reliée en série avec une résistance  $R$  (cf. figure 8). Tout se passe comme si l'association série  $R$ , bobine de  $N$  spires était alimentée par un générateur de courant idéal tel que  $I = \alpha V_S$ .

Le montage global peut alors être représenté comme l'indique la figure 9.

**III.F.1** Montrer que le montage global peut être traduit par la représentation synoptique (figure 10). On précisera la nature des diverses fonctions qui apparaissent dans ce schéma bloc.

**III.F.2** Déterminer la fonction de transfert  $G = I/i$ .

**III.F.3** Comment peut-on choisir  $A$  pour que l'égalité  $I = ni/N$  soit considérée comme réalisée?

**III.F.4** Quelle est la partie du montage qui peut être à l'origine des non linéarités qui feraient que le courant  $I$  ne serait pas la reproduction des variations temporelles du courant  $i$ .

**III.F.5** L'objet de ce montage étant de mesurer  $i$ , quel est le rôle de la résistance  $R$  placée en série avec le bobinage de  $N$  spires?

---

••• FIN •••

---

Figure 1

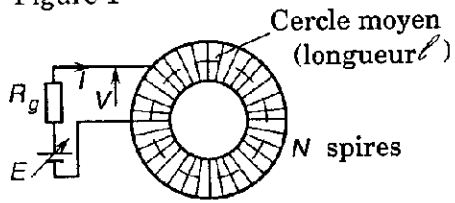


Figure 2

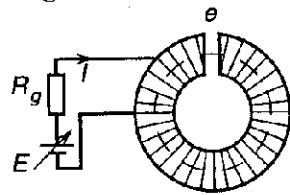


Figure 3

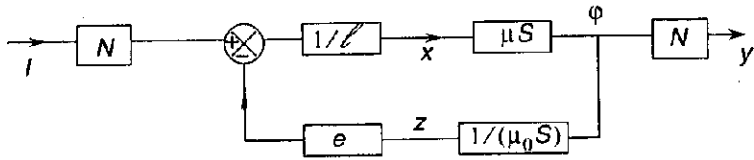


Figure 4

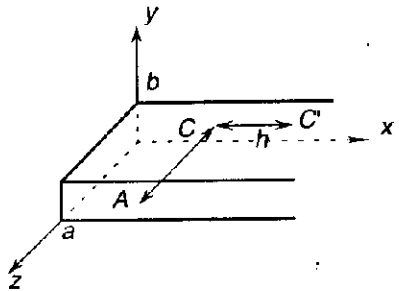


Figure 5

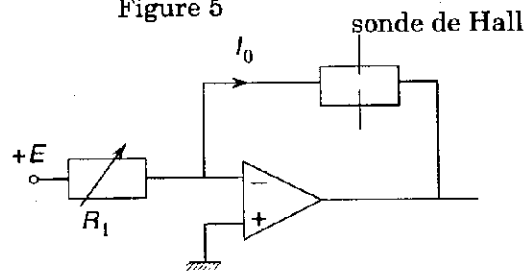


Figure 6

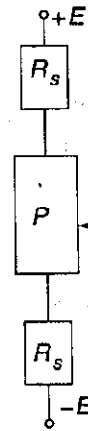
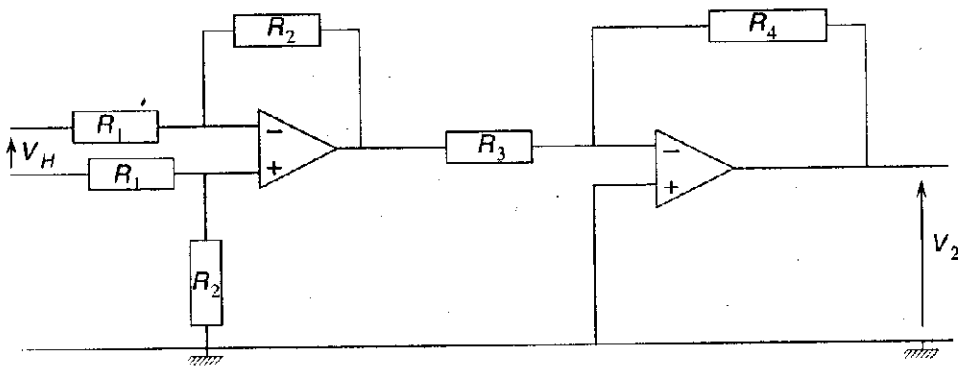


Figure 7

Figure 8

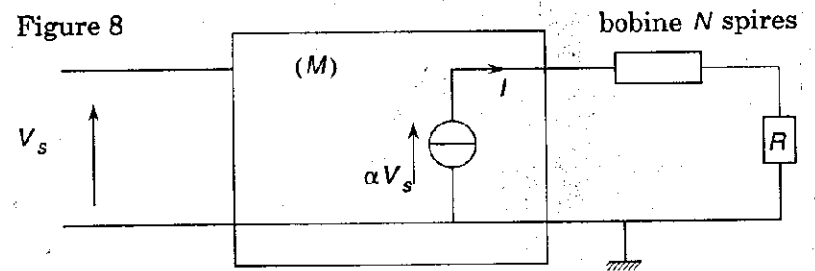


Figure 9

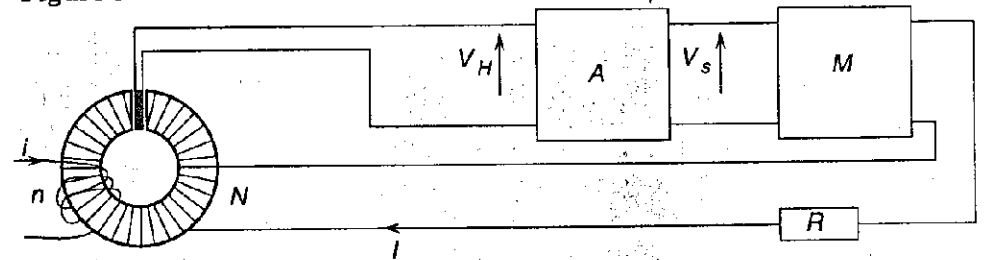


Figure 10

