



## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE FILIÈRE PSI

### PHYSIQUE 1

Durée : 4 heures

*Les candidats doivent respecter les notations des énoncés et préciser, dans chaque cas, la numérotation de la question traitée.*

#### I. ECHANGES DE CHALEUR

NB : *La partie I.3 peut être entièrement traitée sans les réponses aux parties I.1 et I.2.*

*La partie I.4 concerne des applications numériques portant sur les parties I.1 et I.3. Chaque application numérique fait référence aux questions dont on devra utiliser les réponses.*

On considère le dispositif suivant (voir figure I. 1) :

- Une enceinte, étanche et indéformable, contient un fluide, en phase liquide et vapeur. Ces deux phases sont en équilibre thermique, à la même température  $T$ .
- Dans la partie inférieure de l'enceinte, dans le liquide, une résistance chauffante permet un apport de chaleur au liquide.
- A la partie supérieure de l'enceinte, dans la vapeur, un tube où circule de l'eau liquide permet l'échange de chaleur avec la vapeur de l'enceinte.

Dans ce tube, la masse d'eau circulant par unité de temps ( $D$ ) est mesurée avec un débitmètre, les températures de l'eau à l'entrée ( $t_e$ ) et à la sortie ( $t_s$ ) du tube sont mesurées avec des thermomètres

**Remarque importante :**

Dans toute la suite de ce problème, la température d'entrée de l'eau sera toujours inférieure à la température du fluide dans l'enceinte ( $t_e < T$ ), et la valeur du débit  $D$  n'est jamais nulle ( $D > 0$ ).

#### I. 1. Variation de la température le long du tube échangeur

- I. 1.1. Le tube situé à la partie supérieure de l'enceinte est appelé ici "condenseur". Justifier cette dénomination.
- I. 1.2. Donner l'expression littérale de la puissance calorifique totale  $P_c$  que reçoit l'eau qui circule dans le condenseur. On notera  $J$ , la capacité calorifique massique de l'eau.
- I. 1.3. Le tube du condenseur est cylindrique, sa longueur est  $L$ . L'épaisseur de la paroi qui sépare l'eau circulant dans le condenseur de la vapeur qui l'entoure, est très faible par rapport au diamètre ( $d$ ) du tube.

On admet que les échanges de chaleur se font proportionnellement à la surface d'échange et à la différence de température avec un coefficient d'échange  $a$ , exprimé en Watt par mètre carré et par Kelvin.

Soit  $x$ , la coordonnée d'une tranche d'eau, de faible épaisseur, comprise entre deux sections droites très voisines du tube et  $\theta(x)$  la température de l'eau de cette tranche supposée uniforme (voir figure I. 2). La puissance calorifique qu'elle reçoit est  $dq/dt = a.ds. (T - \theta)$  ; ici  $ds$  est la surface de l'interface séparant les températures  $T$  et  $\theta$ , c'est donc la surface de la portion de tube entourant la tranche de liquide. L'eau entrant dans le tube, en  $x = 0$ , à la température  $t_e$ , trouver l'expression de  $\theta(x)$  en fonction de  $x, T, t_e, a, D, J$  et  $d$ .

Pour traiter cette question, on admet que l'eau est un fluide parfait s'écoulant à la même vitesse en tout point du tube.

I. 1.4. Déduire de l'expression de  $\theta(x)$ , la température de sortie  $t_s$  en fonction de  $T, t_e, a, D, J$  et  $S$ , où  $S$  est la surface totale du tube d'échange.

I. 1.5. Exprimer l'élévation de température ( $t_s - t_e$ ) de l'eau lors de sa traversée du condenseur.

I. 1.6.a On désire maintenant déterminer le coefficient d'échange  $a$  en partant des valeurs de  $t_e, t_s, T, D, J$  et la surface d'échange  $S$ , mais au préalable, il convient de s'assurer qu'il y a bien échange de chaleur sur toute la surface du condenseur.

Soit  $D_c$  la valeur du débit qui, dans l'expression de  $t_s$ , donne à l'exposant de l'exponentielle la valeur  $-5$  (soit pour l'exponentielle une valeur de  $0,0067$  donc moindre que  $1\%$ ), exprimer  $D_c$  en fonction de  $a, S$  et  $J$ .

I. 1.6.b Donner les allures des courbes représentant  $\theta(x)$  pour un débit de l'ordre de  $D_c$ , pour un débit très faible  $D_f$  ( $D_f \ll D_c$ ) et pour un débit très important  $D_g$  ( $D_g \gg D_c$ ).

I. 1.6.c Au vu de ces courbes, comment faut-il choisir la valeur du débit pour que toute la surface du condenseur soit utilisée pour les échanges de chaleur ?

I. 1.6.d Exprimer le coefficient d'échange  $a$ , en fonction de  $t_e, t_s, T, D, J$  et de la surface d'échange  $S$ , dans le cas d'un débit  $D$  qui permet d'en faire la détermination.

I. 1.6.e On définit :

$$t_m = (t_1 - t_2) / \ln(t_1 / t_2)$$

où  $t_1 = T - t_e$  et  $t_2 = T - t_s$

Montrer que l'expression du coefficient d'échange du I. 1.6.d peut se calculer ainsi :

$$a = P_c / S.t_m$$

I. 1.6.f La définition de  $t_m$  exclut de ce calcul les cas où  $t_2 = 0$ .

Pouvez-vous préciser à quels débits correspond ce cas ?

## I. 2. Transferts de chaleur - Cas de l'enceinte isolée

Les parois extérieures de l'enceinte étant soigneusement isolées, les échanges avec l'extérieur sont limités à l'apport de chaleur par la résistance chauffante et au prélèvement de chaleur par l'eau circulant dans le condenseur.

Les paramètres suivants sont gardés constants :

- puissance de la résistance chauffante  $P_r$ ,
- température d'entrée d'eau  $t_e$ ,
- débit d'eau  $D$ .

Après un certain temps, le système atteint un équilibre ; le liquide et la vapeur ont la même température  $T$ , la température de sortie de l'eau s'est stabilisée. Le fluide de l'enceinte peut alors être caractérisé par ses paramètres : température  $T$ , pression  $P$  et masse de liquide  $m$  (c'est une fraction de la masse totale du fluide).

- I. 2.1. Quelle est la relation entre  $P_r$  et  $P_c$  ? Expliquer le cycle auquel participe une fraction du fluide.
- I. 2.2. Soit  $L(T)$  la chaleur latente massique du changement d'état liquide-vapeur du fluide contenu dans l'enceinte. Donner la masse de fluide qui, par unité de temps, change d'état pour assurer le transfert de la chaleur apportée par la résistance à l'eau du condenseur ; cette masse changeante sera notée  $dm_c/dt$ .
- I. 2.3.a En vous servant du résultat de I. 1.5. exprimer la température  $T$  du fluide en fonction de  $t_c$ ,  $P_r$ ,  $J$ ,  $D$ ,  $a$  et  $S$ . La valeur de  $T$  ainsi trouvée est-elle valable quelle que soit la valeur du débit ?
- I. 2.3.b Que devient la température du fluide, si on augmente indéfiniment le débit  $D$ ,  $P_r$  et  $t_c$  restant inchangés ?
- I. 2.3.c Interpréter le résultat de I. 2.3.b en exprimant la puissance  $P_c$  en fonction de  $S$ ,  $a$ ,  $T$ , et  $t_c$ .
- I. 2.4. On augmente la puissance du chauffage à la valeur  $P_r'$  sans changer le débit d'eau et la température à l'entrée du condenseur. Après un temps suffisant on obtient un nouvel équilibre.  
Comment ont évolué les paramètres du fluide : nouvelle température  $T'$ , nouvelle pression  $P'$  et nouvelle masse du fluide à l'état liquide  $m'$  ?
- I. 2.5. En utilisant le résultat de I. 2.3.a, calculer la variation de température du fluide ( $T' - T$ ) en fonction de l'augmentation de puissance ( $P_r' - P_r$ ).
- I. 2.6. Reproduire schématiquement le diagramme enthalpique, joint à l'énoncé (voir figure I. 3), et y indiquer les positions relatives des 2 états du fluide obtenus pour les puissances de chauffe  $P_r$  et  $P_r'$  (placer un point  $M$  pour la puissance  $P_r$  sur la seule isochore représentée, préciser alors la position du point  $M'$  pour la puissance  $P_r'$ ).
- I. 2.7. Indiquer comment lire sur ce diagramme enthalpique, les chaleurs latentes  $L(T)$  du changement d'état liquide-vapeur. Quelle est la valeur de la chaleur latente à la température critique ?

### I. 3. Transferts de chaleur - Cas de l'enceinte non isolée

Les parois extérieures de l'enceinte ne sont plus isolées. L'enceinte échange maintenant de la chaleur avec son environnement extérieur. On supposera que la température du milieu extérieur reste constante et ne dépend pas des échanges qu'il peut y avoir avec l'enceinte. Soit  $T_0$  la valeur constante de la température du milieu extérieur.

- I. 3.1. Dans cette nouvelle configuration, on fait une expérience où les paramètres suivants sont gardés constants :
- puissance de la résistance chauffante  $P_r$ ,
  - température d'entrée d'eau  $t_c$ ,
  - débit d'eau  $D_1$ .

Après un certain temps, le système atteint un équilibre ; le liquide et la vapeur ont la même température  $T_1$ , la température de sortie de l'eau s'est stabilisée à  $t_{s1}$  (avec  $t_{s1} < T_1$ ). Soient alors  $P_{c1}$  la puissance reçue par l'eau du condenseur et  $P_{p1}$  la puissance transférée au travers des parois du système vers l'extérieur.

Exprimer  $P_{p1}$  en fonction de  $P_{c1}$  et  $P_r$ .

- I. 3.2. On reprend une nouvelle expérience,  $P_r$  et  $t_c$  sont inchangés, mais on augmente le débit d'eau à une valeur  $D_2$ . Après un certain temps, on obtient un nouvel équilibre ; le liquide et la vapeur ont la même température  $T_2$ , la température de sortie de l'eau s'est stabilisée à  $t_{s2}$  (avec  $t_{s2} < T_2$ ). Soient  $P_{c2}$  et  $P_{p2}$  les nouvelles puissances transférées vers l'extérieur.

En admettant toujours comme en I. 1.3 que les échanges de chaleur se font proportionnellement à la surface et à la différence de température, exprimer les puissances calorifiques  $P_{p1}$  et  $P_{p2}$  en fonction de : la surface totale ( $S_e$ ) de l'enceinte, du coefficient d'échange  $b$ , des températures  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_0$ . Ici,  $b$  est le coefficient d'échange au niveau des parois de l'enceinte, il est toujours exprimé en Watt par mètre carré et par Kelvin, sa valeur peut être différente du coefficient  $a$  évoqué en I. 1.3.. En déduire une expression permettant de déterminer  $b$  en fonction de  $P_{c1}$ ,  $P_{c2}$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $S_e$ .

- I. 3.3. Si on faisait d'autres expériences où  $P_r$  et  $t_e$  restent inchangés, avec une série de débits d'eau ( $D_i$ ), les équilibres thermiques conduiraient à des puissances thermiques  $P_{ci}$  et des températures correspondantes  $T_i$ . Montrer que la représentation de  $P_{ci}(T_i)$  est une droite. En déduire la valeur de  $T_0$  en fonction de  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $P_{c1}$ ,  $P_{c2}$  et  $P_r$ .
- I. 3.4. Dans le liquide de l'enceinte, l'échange de chaleur à la surface extérieure de la résistance chauffante, entre cette résistance et le liquide, suit aussi une relation du même type que celles utilisées au niveau du condenseur et des parois du système non isolé. Soit  $c$  ce nouveau coefficient d'échange,  $S_r$  la surface externe de la résistance,  $t_r$  la température de sa surface et  $T$  la température du liquide, donner l'expression de  $c$ .

#### I. 4. Applications numériques

Toutes les températures sont données en °C.

La capacité calorifique massique de l'eau est  $J = 4\,186 \text{ J/kg.K}$ .

On donne les valeurs expérimentales suivantes :

$$P_r = 106 \text{ W et } t_e = 14,0 \text{ °C ;}$$

$$D_1 = 2,0 \text{ g/s ; } T_1 = 27,3 \text{ ; } t_{s1} = 27,2 \text{ ; } t_{r1} = 57,3 \text{ ;}$$

- I. 4.1. Calculer  $P_{c1}$  (voir I. 1.2.).

On donne les dimensions du tube du condenseur :

$$L = 1 \text{ m ; } d = 1 \text{ cm ;}$$

- I. 4.2. Calculer le débit  $D_c$  (voir I. 1.6.a),  
I. 4.3. Calculer le coefficient d'échange  $a$  (voir I. 1.6.d ou I. 1.6.e).

On donne les résultats d'une autre expérience :

$$P_r = 106 \text{ W et } t_e = 14,0 \text{ °C ;}$$

$$D_2 = 2,5 \text{ g/s ; } T_2 = 25,1 \text{ ; } t_{s2} = 24,8 \text{ ; } t_{r2} = 55,1 \text{ ;}$$

- I. 4.4. Calculer  $P_{c2}$  (voir I. 1.2.).

On donne la surface extérieure de l'enceinte  $S_e = 0,2 \text{ m}^2$ , avec l'ensemble de ces deux expériences,

- I. 4.5. Calculer  $b$  (voir I. 3.2.),  
I. 4.6. Calculer  $T_0$  (voir I. 3.3.).

On donne enfin la surface externe de la résistance chauffante  $S_r = 13 \text{ cm}^2$  ;

- I. 4.7. Calculer  $c$  avec l'une des expériences (voir I. 3.4.).  
I. 4.8. Conclusion :

Les 3 coefficients d'échange  $a$ ,  $b$  et  $c$  ont des valeurs très différentes. Peut-on en partie l'expliquer par la nature des phases du fluide intervenant dans ces échanges et éventuellement par la nature du contact thermique (direct ou au travers de parois plus ou moins conductrices de la chaleur) ?

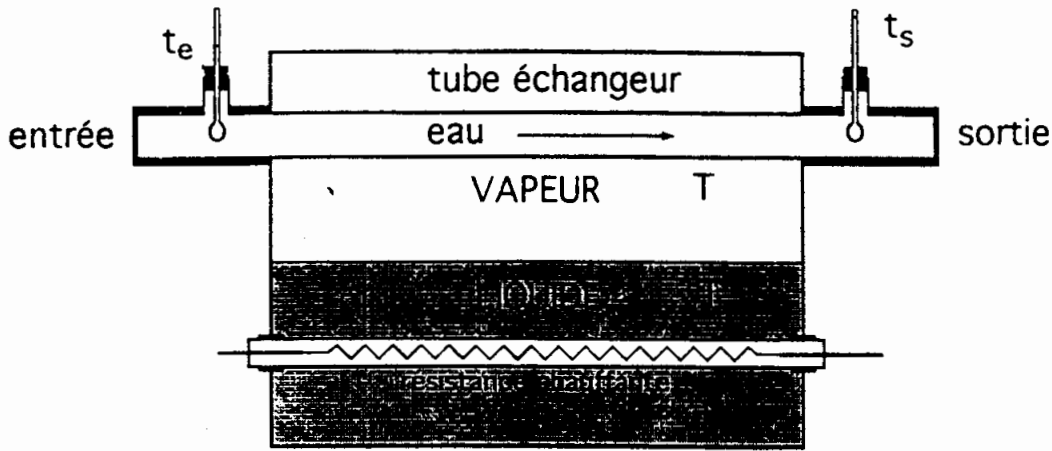


Figure I.1

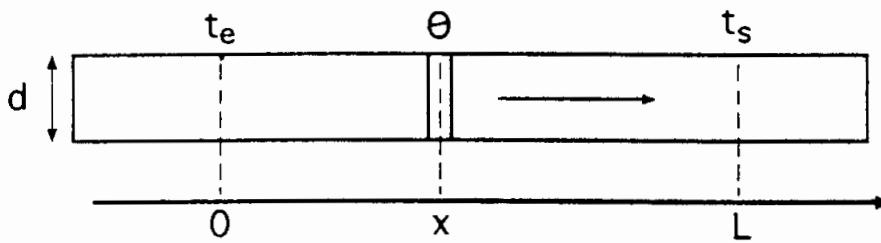


Figure I.2

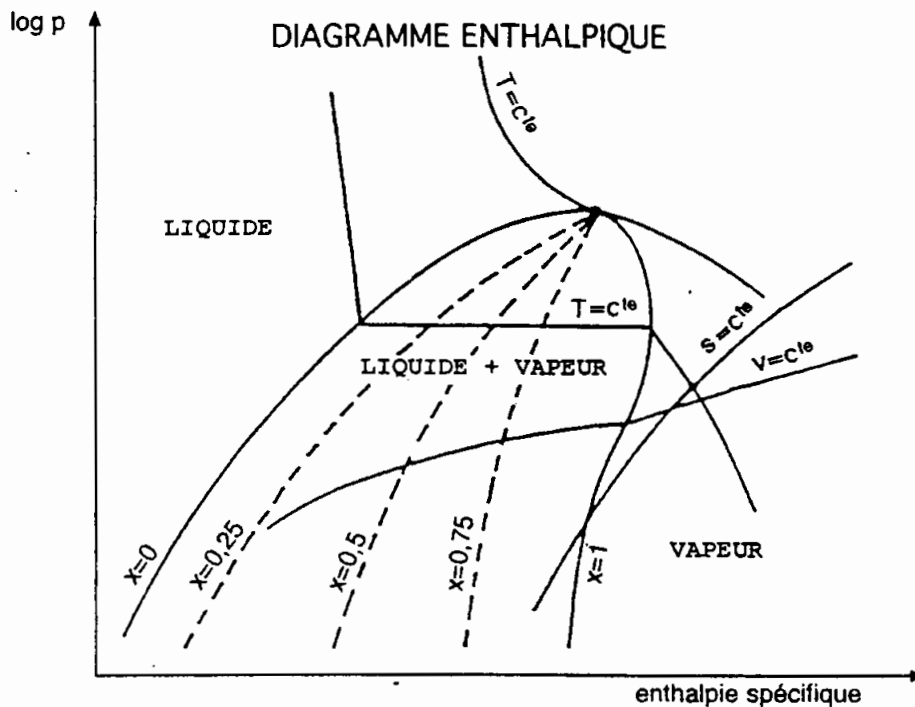


Figure I.3

LE DIAGRAMME ENTHALPIQUE représente la pression du fluide (en échelle log.) en fonction de son enthalpie spécifique (enthalpie par unité de masse). Sur ce diagramme, figurent les isothermes, les isochores (volume spécifique constant), les isentropiques. Ce diagramme comporte la courbe de saturation qui renferme les états de mélange liquide-vapeur en équilibre ; les courbes de titre constant ( $x$  vapeur,  $(1-x)$ liquide) y sont représentées.

## II. ELECTROMAGNETISME

**II.A.** Une bobine constituée de plusieurs couches de fil à spires jointives, comprenant au total  $N$  spires circulaires de rayon moyen  $b$ , et dont la longueur totale est  $l$ , est parcourue par un courant d'intensité  $I = I_m \cos \omega t$ . L'axe de la bobine est choisi comme axe  $Oz$ , l'origine  $O$  étant prise au centre de la face nord de la bobine, et l'axe orienté vers l'extérieur de la bobine. A la cote  $z = h > 0$  de l'axe  $Oz$  est placée, parallèlement à la bobine et également centrée sur l'axe, une spire conductrice circulaire de rayon  $a$  (figure II.1). Cette spire n'est pas alimentée en courant par un générateur extérieur. L'ensemble est placé dans l'air, dont la perméabilité est la même que celle du vide, c'est à dire  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ S.I.}$

On veut estimer la force magnétique subie par la spire de rayon  $a$ . Cette estimation se fera grâce à quelques approximations, basées notamment sur le fait que  $a$  est petit devant  $b$ . Dans cette estimation, il ne sera nécessaire de calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  de la bobine que sur l'axe  $Oz$ . On admettra aussi que toutes les spires de la bobine ont pour rayon exact  $b$ , et dans ces conditions le champ  $\vec{B}$  en un point  $M$  de cote  $z > 0$  est donné par la formule  $\vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \vec{u}_z$ , où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont les angles indiqués sur la figure II.2,  $n = \frac{N}{l}$  est le nombre de spires par unité de longueur, et  $\vec{u}_z$  est le vecteur unitaire de l'axe  $Oz$ .

**II.A.1.** On note  $\Phi$  le flux du champ  $\vec{B}$  à travers la spire de rayon  $a$ , orientée dans le même sens que la bobine. Soient d'autre part  $R$  et  $L$  la résistance et le coefficient d'auto-induction de la spire. On note enfin  $I_1(t)$  l'intensité du courant circulant dans la spire en régime permanent.

II.A.1.a. Ecrire l'équation électrique de ce circuit.

II.A.1.b. Pour calculer  $\Phi$ , on fait l'approximation suivante: on considère que le champ  $\vec{B}$  est uniforme sur toute la surface de la spire et égal à  $\vec{B}_0$ , sa valeur au centre de la spire. On note  $B_m$  l'amplitude de  $\vec{B}_0$  en ce point ( $\vec{B}_0 = B_m \cos \omega t \vec{u}_z$ ). On note aussi  $|Z|$  et  $\varphi$  le module et l'argument de l'impédance complexe  $Z = R + i\omega L$  ( $Z = |Z| e^{i\varphi}$ ). Exprimer  $I_1(t)$  en fonction de  $B_m$ ,  $a$ ,  $\omega$ ,  $|Z|$ ,  $\varphi$  et  $t$ .

II.A.1.c. Donner enfin l'expression du moment magnétique  $\vec{m}$  de la spire. Quelle est la différence de phase entre  $\vec{m}$  et  $\vec{B}_0$  ?

**II.A.2.** La résultante des forces exercées par  $\vec{B}$  sur la spire de rayon  $a$  est  $\vec{F} = I_1 \oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$ , l'intégrale étant prise le long de la spire. Comme on ne connaît pas  $\vec{B}$  en dehors de l'axe  $Oz$ , on se propose de transformer cette expression de  $\vec{F}$ .

II.A.2.a. La projection de  $\vec{F}$  sur un axe,  $Ox$  par exemple, est  $F_x = \vec{F} \cdot \vec{u}_x = I_1 \oint \vec{u}_x \cdot (d\vec{l} \wedge \vec{B}) = I_1 \oint (\vec{B} \wedge \vec{u}_x) \cdot d\vec{l}$ . Utiliser le théorème de Stokes et

l'équation  $\text{div} \vec{B} = 0$  pour montrer que cette intégrale s'écrit aussi  $F_x = I_1 \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \cdot d\vec{S}$ , l'intégrale étant prise sur une surface s'appuyant sur la spire.

II.A.2.b. Dans le cas présent, les composantes  $F_x$  et  $F_y$  sont nulles. Expliquer ce résultat par des considérations de symétrie.

Il reste  $F_z = I_1 \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \cdot d\vec{S}$ . La spire étant de petites dimensions,  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$  varie peu sur la surface de la spire, et on obtient, en première approximation,  $F_z = \bar{m} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$ , où  $\bar{m}$  est le moment magnétique de la spire et  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial z}$  est évalué au centre de la spire. C'est cette expression de  $F_z$  qu'on utilisera dans la suite.

II.A.3. Etablir l'expression de  $\langle F_z \rangle$ , la moyenne temporelle de  $F_z$  (définie par  $\langle F_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F_z dt$ , où  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) en fonction de  $a$ ,  $B_m$ ,  $\frac{dB_m}{dz}$ ,  $\omega$ ,  $|Z|$  et  $\sin \varphi$ . Quel sera, tous calculs faits, le signe de  $\langle F_z \rangle$ ? Remplacer enfin  $|Z|$  et  $\sin \varphi$  par leur expression en fonction de  $\omega$ ,  $R$  et  $L$ . En admettant que  $R$  et  $L$  ne varient pas avec la fréquence (ce sera le cas dans l'intervalle de fréquence considéré), étudier la variation de  $\langle F_z \rangle$  en fonction de  $\omega$ , et donner sa limite en fréquence élevée.

II.A.4. La spire de rayon  $a$  est un fil de cuivre de rayon  $r = 1 \text{ mm}$ . La conductivité du cuivre est  $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ . La résistance et le coefficient d'auto-induction de la spire sont donnés, en supposant que la densité de courant est uniforme dans le fil, par  $R = \frac{2a}{\sigma r^2}$  et  $L = \mu_0 a \left( \ln \frac{8a}{r} - \frac{7}{4} \right)$ . Calculer  $R$  et  $L$  pour  $a = 0,5 \text{ cm}$ . A partir de quelle valeur de la fréquence  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$  la force  $\langle F_z \rangle$  atteint-elle sa limite en fréquence élevée à moins de 1% près ?

II.A.5. Les caractéristiques de la bobine sont  $N = 500$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 2,5 \text{ cm}$ . On pose

$$B_m = \mu_0 k I_m \quad \text{et} \quad \frac{dB_m}{dz} = \mu_0 k' I_m.$$

II.A.5.a. Donner l'expression de  $k'$  en fonction de  $n$ ,  $b$ ,  $l$  et  $h$ .

II.A.5.b. Calculer numériquement les coefficients  $k$  et  $k'$  pour  $h = 1 \text{ cm}$ .

II.A.5.c. A  $\nu = 30 \text{ KHz}$ , quelle doit être l'intensité efficace  $I_{\text{eff}}$  dans la bobine pour que la force puisse équilibrer le poids de la spire (l'axe  $Oz$  étant alors vertical) ? La masse volumique du cuivre est  $\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  et l'accélération de la pesanteur est  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Donner aussi, dans ce cas, les valeurs de  $B_m$  et  $\frac{dB_m}{dz}$ .

II.A.5.d. Le résultat montre la faisabilité d'une expérience de lévitation magnétique avec une telle bobine. Comment pourrait-on, sans changer le nombre de spires de la bobine, augmenter considérablement le champ  $\vec{B}$  ?

II.B. La spire de rayon  $a$  est remplacée par une sphère métallique pleine de même rayon, centrée au même point  $z = h$  de l'axe  $Oz$ . La partie II. A a montré l'importance d'une fréquence élevée pour l'obtention d'une force notable. Or à haute fréquence, les courants induits dans la sphère circulent à proximité de la surface: c'est l'effet de peau. On utilise ici cet effet pour estimer le moment magnétique de la sphère, en assimilant les courants induits à de vrais courants de surface. La densité de courant  $\vec{j}_S$  de ces courants de surface sera, en supposant à nouveau un champ appliqué sensiblement uniforme (égal à  $\vec{B}_0$ ):  $\vec{j}_S = J(t) \sin\theta \vec{u}_\varphi$ , où  $J(t)$  est à déterminer.

$\theta$  et  $\varphi$  sont ici les angles polaires en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $C$  (le centre de la sphère) et d'axe  $Cz$ ,  $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$  désigneront les vecteurs unitaires associés à ces coordonnées (figure II.3). Dans la suite  $\vec{r}$  désigne le vecteur position, d'origine  $C$  (donc  $\vec{r} = r\vec{u}_r$ ) et non d'origine  $O$ .

II.B.1. Le potentiel vecteur  $\vec{A}_1$  dû à ces courants de surface est  $\vec{A}_1(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_S(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$ ,

où l'intégrale est étendue à toute la surface de la sphère. En notant que  $\vec{j}_S = J \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$ , cette intégrale se ramène d'abord au calcul d'une autre intégrale:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{u}_r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'.$$

II.B.1.a. La projection de  $\vec{E}_1$  sur un axe,  $Ox$  par exemple, est  $\vec{u}_x \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{u}_x \cdot \vec{u}_r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS'$ .

Utiliser le théorème de Green-Ostrogradski pour montrer que  $\vec{u}_x \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi} \vec{u}_x \cdot \iiint_{r' < a} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$ , l'intégrale étant étendue au volume de la sphère.

II.B.1.b. Or en électrostatique,  $\frac{1}{4\pi} \iiint_{r' < a} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$  est le champ qui serait créé par une distribution uniforme de charge à l'intérieur de la sphère, avec une charge volumique égale à  $\epsilon_0$ . Calculer ce champ, à l'intérieur de la sphère, en utilisant le théorème de Gauss.

II.B.1.c. En déduire  $\vec{A}_1$ , puis le champ  $\vec{B}_1$  créé par les courants  $\vec{j}_S$  à l'intérieur de la sphère (faire ce calcul en coordonnées cartésiennes). Quelle est la particularité de ce champ ?

II.B.2. A l'intérieur de la sphère, où est valable la loi d'Ohm  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ,  $\vec{j}$  étant la densité volumique de courant et  $\sigma$  la conductivité, le champ électrique doit être nul puisque  $\vec{j}$  y est nul. Et il en résulte que le champ magnétique total doit aussi y être nul. Pourquoi? Donc  $\vec{B}_0 + \vec{B}_1 = 0$  à l'intérieur de la sphère. En déduire  $J(t)$ .

II.B.3. Calculer, en fonction de  $a$  et de  $J$ , le moment magnétique  $\vec{m}$  de la sphère par rapport à son centre  $C$ , défini par  $\vec{m} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{r} \wedge \vec{j}_S dS$ .



Les questions 1, 2 et 3 ont permis d'établir qu'en première approximation, le moment magnétique  $\vec{m}$  de la sphère est donné par  $\vec{m} = -2\pi a^3 \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$ . Comparer ce moment à celui de la spire de même rayon à fréquence élevée. Commentaire.

II.B.4. Calculer, avec les mêmes données numériques que dans la partie A, l'intensité  $I_{eff}$  qui donne une force  $\langle F_z \rangle$  suffisante pour équilibrer le poids de la sphère.

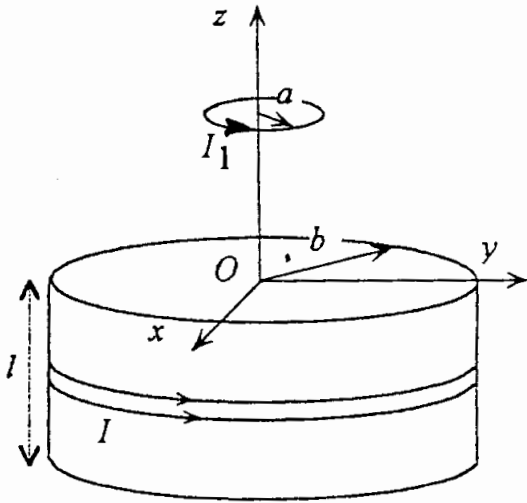


Figure II.1

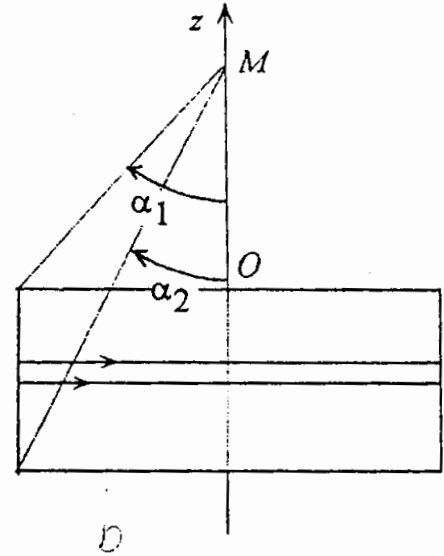


Figure II.2

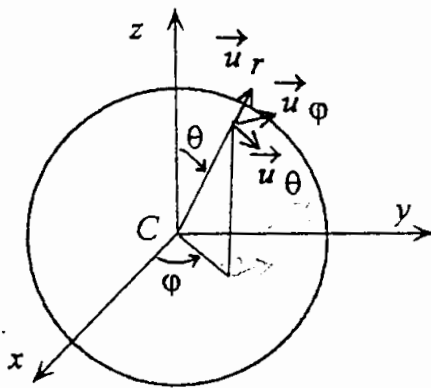


Figure II.3