

**CONCOURS ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE****Epreuve de Physique PC****durée 4 heures**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice est autorisé

Remarques préliminaires importantes. Il est rappelé aux candidat(e)s que :

- *les explications des phénomènes étudiés interviennent dans la notation au même titre que les développements analytiques et les applications numériques.*
- *tout au long de l'énoncé, les paragraphes en italiques ont pour objet d'aider à la compréhension du problème mais ne donnent pas lieu à des questions.*
- *tout résultat fourni dans l'énoncé peut être admis et utilisé par la suite, même s'il n'a pas été démontré par les candidat(e)s.*

Un défi métrologique : la détection des ondes gravitationnelles

Le théorie d'Einstein de la relativité générale prévoit l'existence de phénomènes ondulatoires associés aux champ de gravitation : les ondes gravitationnelles. Depuis leur prédiction, en 1916 par EINSTEIN, aucune expérience n'a permis de détecter directement ces ondes. Les effets attendus sont en effet extrêmement faibles : en pratique, il faut déceler une variation de longueur avec une précision de l'ordre de 10^{-21} ! Une telle précision, autrefois inimaginable, semble aujourd'hui accessible à l'aide d'interféromètres de MICHELSON de très grandes dimensions (bras de plusieurs kilomètres). Les difficultés restent considérables, mais plusieurs installations sont en voie d'achèvement, tels les projets LIGO aux Etats-Unis et VIRGO en Europe ; elles devraient bientôt fournir leurs premières observations.

La première partie de ce problème aborde le principe physique de la méthode de détection envisagée ainsi qu'un des moyens permettant de s'affranchir des fluctuations de puissance du LASER utilisé. La deuxième partie s'intéresse à l'aspect mécanique d'un des systèmes physiques, source d'ondes gravitationnelles susceptibles d'être détectées. Les deux parties sont totalement indépendantes entre elles.

Aucune connaissance de la théorie de la relativité d'Einstein n'est nécessaire à la résolution du problème.

Données physiques :

- constante de la gravitation : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ (S.I.)
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8$ m.s⁻¹

Conventions générales :

Le nombre complexe de module 1 et d'argument $+\frac{\pi}{2}$ sera noté j .

Les grandeurs sinusoïdales seront représentées en notation complexe. Par convention, la grandeur complexe associée à une grandeur réelle de la forme $g(t) = g_0 \cos(\omega t + \varphi)$ sera désignée par une lettre soulignée notée $\underline{g} = g_0 \exp[j(\omega t + \varphi)]$.

Conventions relatives au signal lumineux :

Une onde lumineuse monochromatique de pulsation ω est caractérisée par un signal lumineux s , dont la représentation complexe en un point M donné est de la forme $\underline{s}(M, t) = a \exp[j(\omega t - \varphi(M))]$ où a est l'amplitude (constante) de l'onde et $\varphi(M)$ sa phase au point considéré.

L'éclairement I associé est relié au signal \underline{s} par $I = |\underline{s}|^2$.

PREMIÈRE PARTIE

DISPOSITIF INTERFERENTIEL ET METHODE DE DETECTION

A – Interféromètre de Michelson

1. Interférences entre deux ondes monochromatiques cohérentes

Etudions la superposition de deux ondes lumineuses monochromatiques, de même pulsation ω , de même amplitude a . Au point M considéré, l'onde 1 possède une phase $\varphi_1(M)$ et l'onde 2, une phase $\varphi_2(M)$.

A1*a. Exprimer le signal lumineux complexe $\underline{s}(M, t)$ résultant de la superposition de ces deux ondes au point M , en fonction de a , ω , t , $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$.

A1*b. Montrer que l'éclairement observé en M peut s'écrire sous la forme $I(M) = 2I_0 [1 + \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))]$, et exprimer I_0 en fonction de a . Quel est le sens concret de I_0 ?

A1*c. Posons $\delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$. Quelle condition doit vérifier $\delta\varphi(M)$ pour que soit observé en M un maximum d'éclairement ? A quelle condition sur $\delta\varphi(M)$ l'éclairement est-il minimal en M ?

2. Source monochromatique

La figure 1 représente le dispositif interférentiel utilisant un interféromètre de MICHELSON :

La séparatrice, S , inclinée de 45° par rapport aux miroirs M_1 et M_2 est idéalisée : il est admis qu'elle n'introduit aucun déphasage supplémentaire. L'interféromètre est supposé réglé en « lame d'air », ce qui signifie que les deux miroirs sont parfaitement perpendiculaires.

Les « bras » de l'interféromètre ont pour longueurs $d_1 = AB$ et $d_2 = AC$. Notons $\delta_0 = 2(d_2 - d_1)$.

Le bras 2 a une longueur fixée, notée $d_2 = L$.

Le miroir M_1 peut être translaté (lors d'un « chariotage »).

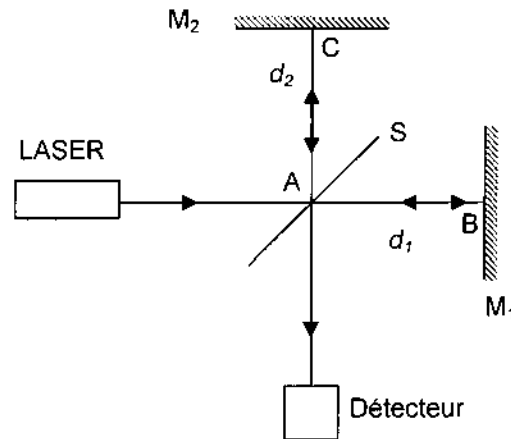


Figure 1 : Interféromètre de MICHELSON

Le LASER utilisé comme source émet un faisceau très fin, parfaitement perpendiculaire à M_1 , de sorte que les deux faisceaux qui émergent de l'interféromètre sont exactement superposés sur le détecteur.

Le LASER est tout d'abord supposé parfaitement monochromatique, de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 1,06 \mu\text{m}$.

L'éclairement reçu par le détecteur lorsque l'un des miroirs est occulté, est noté I_0 .

A2*a. A quelle condition sur δ_0 dit-on que l'interféromètre de MICHELSON est au contact optique ? Décrire brièvement comment procéder, avec les interféromètres utilisés en Travaux Pratiques, pour déterminer précisément le contact optique.

A2*b. Exprimer l'éclairement $I(\delta_0)$ reçu par le détecteur, en fonction de I_0 , λ et δ_0 .

La théorie d'EINSTEIN de la relativité générale prévoit qu'une onde gravitationnelle provoque une variation de la longueur relative des bras, ce qui se traduit par un changement de différence de marche entre les deux signaux optiques qui interfèrent.

En présence d'une onde gravitationnelle, la différence de marche entre les deux ondes optiques au niveau du détecteur devient : $\delta = \delta_0 + L\varepsilon$, où ε est appelée amplitude de l'onde gravitationnelle. C'est une quantité extrêmement petite, dont l'ordre de grandeur attendu est $\varepsilon = 10^{-21}$.

A2*c. En effectuant un développement limité au premier ordre en ε , déterminer la variation d'éclairement $(\Delta I)_{og} = I(\delta) - I(\delta_0)$ induite par l'onde gravitationnelle en fonction de I_0 , δ_0 , L , λ et ε .

A2*d. L'éclairement I_0 étant donné, comment faut-il choisir δ_0 pour que la variation d'éclairement $(\Delta I)_{og}$ soit aussi grande que possible en valeur absolue ?

A2*e. Pour améliorer la sensibilité de détection, il est intéressant de choisir une longueur L très grande. (pour les applications numériques, prendre $L = 100 \text{ km}$)¹

Déterminer numériquement la variation relative $\frac{(\Delta I)_{og}}{I_0}$ maximale attendue pour $\varepsilon = 10^{-21}$.

3. Influence de la largeur spectrale du LASER

Dans cette question, le LASER n'est plus une source parfaitement monochromatique, mais possède une largeur spectrale non nulle. Le LASER est considéré comme la superposition de sources quasi monochromatiques de pulsations ω , et l'éclairement spectral en pulsation sera désigné par $I_{0\omega}$.

Plus précisément, si l'un des miroirs de l'interféromètre est occulté (donc si une seule onde lumineuse parvient au détecteur), les composantes de pulsation comprise dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$ donnent sur le détecteur un éclairement : $dI_0 = I_{0\omega} d\omega$.

Considérons un LASER possédant un profil spectral rectangulaire en pulsation, de largeur $\Delta\omega$, centré sur la pulsation ω_0 , de la forme :

$$I_{0\omega} = K \text{ (constante), si } \omega \in \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right] \text{ et } I_{0\omega} = 0, \text{ si } \omega \notin \left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right].$$

A3*a. Pourquoi est-il légitime de sommer les éclairements associés à des signaux de pulsations différentes ? Exprimer l'éclairement total I_0 reçu par le détecteur, si l'un des miroirs est occulté, en fonction de K et $\Delta\omega$.

A3*b. Supposons que la différence de marche entre les deux ondes est δ . Si aucun des miroirs n'est occulté, exprimer l'éclairement dI associé aux composantes de pulsation situées dans l'intervalle $[\omega, \omega + d\omega]$, en fonction de ω_0 , δ , I_0 , $\Delta\omega$ et $d\omega$.

A3*c. En déduire que l'éclairement $I(\delta)$ au niveau du détecteur est de la forme :

$$I(\delta) = 2I_0 \left[1 + V(\delta) \cos\left(\frac{\omega_0}{c} \delta\right) \right], \text{ et exprimer } V(\delta) \text{ en fonction de } \Delta\omega, \delta \text{ et } c.$$

Que vaut $V(\delta)$ si $\Delta\omega = 0$? Commenter ce résultat.

A3*d. Quelle est la signification concrète du paramètre $|V(\delta)|$?

Pour une valeur donnée de la largeur $\Delta\omega$, représenter $|V(\delta)|$ en fonction de δ , en faisant apparaître les points remarquables.

A3*e. Justifier que le phénomène d'interférences n'est plus décelable si la différence de marche δ est nettement plus grande, en valeur absolue, que la longueur caractéristique

$$\ell_c = \frac{2\pi c}{\Delta\omega}.$$

¹ En réalité, les miroirs et la séparatrice sont distants de « seulement » quelques kilomètres (trois kilomètres pour le projet européen VIRGO), mais la longueur effective des bras est allongée à l'aide d'un dispositif optique (interféromètre de Fabry-Pérot) qui ne sera pas étudié ici.

Dans l'interféromètre réel, il est difficile de garantir que les longueurs² des deux bras sont identiques à mieux que quelques mètres près. La différence de marche exacte de l'interféromètre, δ_0 n'est donc pas connue précisément ; en tout état de cause, elle est inférieure à $\delta_{0,\max} = 10 \text{ m}$.

A3*f. Déterminer en fonction de $\delta_{0,\max}$ un ordre de grandeur de la largeur $\Delta\omega_{\max}$ maximale permettant d'observer des interférences pour $\delta = \delta_{0,\max}$. Estimer numériquement $\frac{\Delta\omega_{\max}}{\omega_0}$.

Admettons désormais que la largeur spectrale du LASER vérifie $\Delta\omega \ll \Delta\omega_{\max}$, ce qui autorise à le considérer comme parfaitement monochromatique ; les résultats de la sous-partie 2. peuvent donc être appliqués.

B - Prise en compte des fluctuations de puissance du LASER

1. Influence des fluctuations de puissance

La puissance du LASER n'est en fait pas rigoureusement constante au cours du temps, mais a tendance à fluctuer de façon aléatoire, ce qui fait varier la quantité I_0 .

B1*a. Sous l'effet d'une fluctuation de puissance, l'éclairement I_0 devient $I_0 + \Delta I_0$. En supposant que $\varepsilon = 0$, déterminer la variation correspondante d'éclairement détecté, $(\Delta I)_{\text{fluc}}$ en fonction de ΔI_0 , δ_0 et λ .

B1*b. Comment doit-on choisir δ_0 pour que le signal détecté soit aussi insensible que possible aux fluctuations de puissance du LASER ? Comparer ce choix à la condition de détection optimale des ondes gravitationnelles établie au A2*d. et commenter.

2. Dispositif de POUND DREVER HALL

Le montage est modifié en intercalant sur chacun des bras une lame de verre, comme indiqué sur la figure 2 :

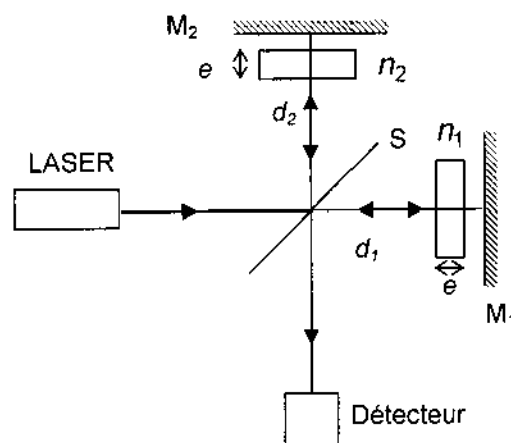


Figure 2 : Méthode de Pound Drever Hall

² Il s'agit, rappelons-le, de longueurs *effectives* (voir note 1).

Les indices de chaque lame, respectivement n_1 et n_2 sont a priori différents. Chaque lame possède exactement la même épaisseur e . Le dispositif fonctionne en présence d'une onde gravitationnelle d'amplitude ε .

B2*a. Exprimer la nouvelle différence de marche δ au niveau du détecteur en fonction de $n_1, n_2, \delta_0, L, \varepsilon$ et e .

Les lames de verre sont en fait constituées d'un matériau dont l'indice de réfraction peut varier de façon contrôlée. Imposons ainsi à n_1 et n_2 une variation sinusoïdale au cours du temps, à la pulsation Ω , selon : $n_1(t) = n - a_0 \cos(\Omega t)$ et $n_2(t) = n + a_0 \cos(\Omega t)$, où a_0 est une constante.

B2*b. Montrer que l'éclairement peut s'écrire : $I = 2I_0 [1 + \cos(\Phi_0 + \alpha\varepsilon + 2m \cos(\Omega t))]$, et exprimer les constantes Φ_0, α et m en fonction de paramètres choisis parmi λ, L, a_0, e et δ_0 .

3. Filtrage du signal détecté – choix du filtre

En « chariotant » le miroir M_1 , l'interféromètre est placé en position de « frange sombre », ce qui correspond à $\Phi_0 = \pi + 2k\pi$, où k est un entier. Il est alors possible de montrer (calcul non demandé) que, si $m \ll 1$, l'éclairement dépend du temps selon la loi :

$$I(t) \cong I_0 [m^2 + 2m\alpha\varepsilon \cos(\Omega t) + m^2 \cos(2\Omega t)].$$

La chaîne de détection utilisée transforme ensuite l'éclairement reçu par le détecteur en une tension $V_d(t)$ proportionnelle à $I(t)$: $V_d(t) = \gamma I(t)$.

B3*a. Expliquer le type de filtrage qu'il convient de faire subir à $V_d(t)$, pour en extraire la composante proportionnelle à ε .

Le filtre utilisé est modélisé par le circuit représenté sur la figure 3, dans lequel l'amplificateur opérationnel est idéal et fonctionne en régime linéaire. k est une constante positive.

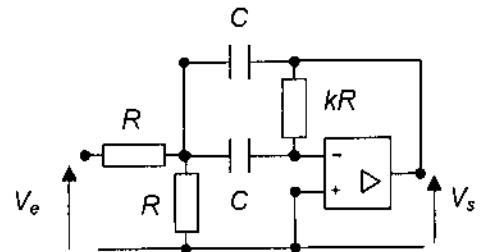


Figure 3 : Filtre

B3*b. Déterminer sans calcul la nature de ce filtre.

B3*c. En se plaçant en régime sinusoïdal établi de pulsation β , montrer que la fonction de transfert du montage $H = \frac{V_s}{V_e}$ peut se mettre sous la forme

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}, \text{ où } x = \frac{\beta}{\Omega_0} \text{ et } H_0, \Omega_0 \text{ et } Q \text{ sont des constantes à exprimer en}$$

fonction de R, C et k .

B3*d. Définir le gain en décibel associé, noté G_{dB} .

Représenter le diagramme de BODE en amplitude : G_{dB} en fonction de $\log(x)$.

Pour le tracé, supposer $Q = 10$, et préciser :

- les asymptotes du diagramme (pente et ordonnée à l'origine),
- la valeur du gain G_{dB} en $x = 1$.

B3*e. Définir et déterminer la largeur de la bande passante du filtre à -3 dB en fonction de Q et Ω_0 .

La tension d'entrée du filtre est en fait la tension délivrée par la chaîne de détection : $V_e(t) = V_d(t)$.

B3*f. A quelle condition entre Ω_0 et Ω le filtre étudié est-il le mieux adapté pour extraire la composante « gravitationnelle » du signal $V_d(t)$?

4. Résultat du filtrage

B4*a. La condition du B3*f. est supposée remplie. Montrer que le signal de sortie $V_s(t)$ est en fait la somme de deux composantes sinusoïdales de pulsations Ω et 2Ω , dont les amplitudes, notées respectivement A_Ω et $A_{2\Omega}$, seront précisées en fonction de γ , I_0 , m , α , ε , Q et H_0 .

La tension de sortie $V_s(t)$ est elle-même filtrée pour obtenir une tension finale constante, dépendant de I_0 et ε , qui s'exprime sous la forme :

$$V(I_0, \varepsilon) = b A_{2\Omega} + A_\Omega.$$

B4*b. Exprimer la variation $(\Delta V)_{fluc} = V(I_0 + \Delta I_0, 0) - V(I_0, 0)$ associée à une fluctuation ΔI_0 de l'éclairement du LASER, en fonction de ΔI_0 , m , b , γ , Q et H_0 .

Déterminer la variation $(\Delta V)_{og} = V(I_0, \varepsilon) - V(I_0, 0)$ associée à une onde gravitationnelle d'amplitude ε en fonction de γ , I_0 , ε , m et α et H_0 .

B4*c. Pour un LASER et un interféromètre donnés, proposer un choix des paramètres de la chaîne de détection et de filtrage pour améliorer le rapport $\frac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$.

Est-il vraiment intéressant de prendre une valeur de m très petite ?

Application numérique : Calculer $\frac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$ avec les valeurs suivantes :

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = 10^{-5}, \quad m = 0,1, \quad b = 10^{-2}, \quad \alpha = 5,9 \cdot 10^{11}, \quad Q = 10, \quad \varepsilon = 10^{-21}.$$

Peut-on détecter les ondes gravitationnelles malgré les fluctuations de puissance du LASER ?

Plutôt que d'utiliser le circuit de la figure 3, il est courant d'employer un filtre modifié, dont le diagramme de Bode est représenté sur la figure 4, ci-dessous :

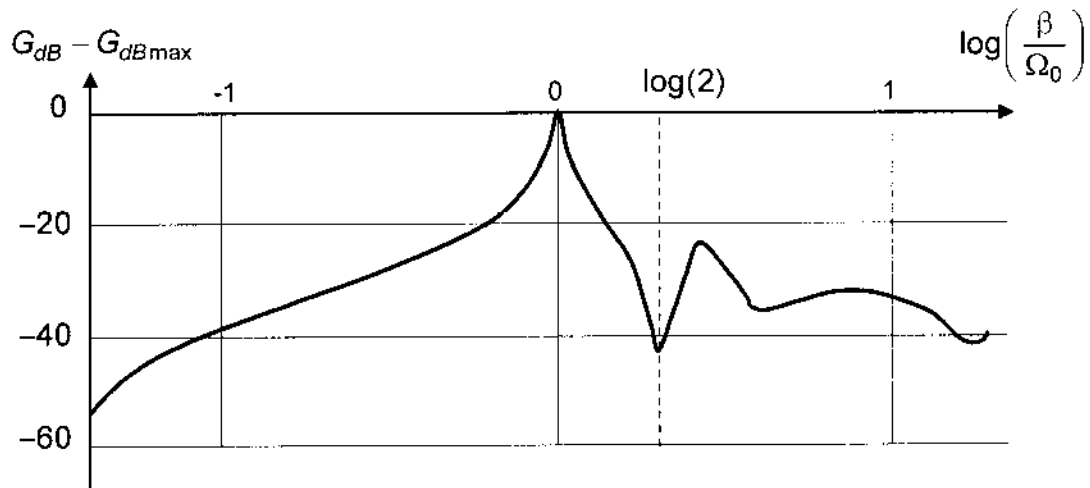


Figure 4 : Réponse expérimentale du filtre réel (projet LIGO)

En pratique $\Omega_0 = 1,6 \times 10^8 \text{ rad.s}^{-1}$; $G_{dB}(2\Omega_0) = G_{dB,max} - 43 \text{ dB}$

$G_{dB,max}$ est le gain maximum du filtre

B4*d. Pourquoi le montage réel est-il mieux adapté au filtrage désiré que le filtre étudié auparavant ? En supposant que le reste de la chaîne de détection et de filtrage n'est pas modifié, évaluer numériquement le rapport $\frac{(\Delta V)_{og}}{(\Delta V)_{fluc}}$ obtenu avec le filtre réel, puis conclure.

DEUXIÈME PARTIE

RAYONNEMENT GRAVITATIONNEL PAR UN SYSTEME DE DEUX ETOILES A NEUTRON

Parmi les sources d'ondes gravitationnelles, l'effondrement d'un système binaire d'étoiles à neutrons est l'un des phénomènes que l'on pense détecter à l'aide de l'interféromètre décrit en première partie. Nous étudierons les aspects mécaniques de ce phénomène, dans le cadre simplifié de la dynamique Newtonienne.

Le référentiel d'étude (R) , est supposé galiléen.

1. Point matériel en rotation autour d'un astre

Considérons dans cette question un astre A de masse M , supposé immobile dans (R) , autour duquel gravite un petit objet S de masse $m \ll M$. Désignons par G la constante de gravitation universelle et notons $r = AS$ et $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{AS}}{r}$.

- 1*a.** Rappeler l'expression de la force de gravitation subie par S de la part de A .
Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle $E_p(r)$ qui sera exprimée en prenant l'origine de l'énergie potentielle à l'infini.
- 1*b.** Montrer que le moment cinétique de S relativement au point A dans (R) , noté $\vec{L}_{A/(R)}$, est un vecteur constant.
En déduire que la trajectoire de S est située dans un plan passant par A .
- 1*c.** Admettons pour simplifier que le point S ait une trajectoire circulaire de rayon R , avec une vitesse angulaire de rotation ω . Exprimer ω en fonction de G , M et R .
- 1*d.** Rappeler l'énoncé de la 3eme loi de KEPLER relative à la période de rotation des satellites autour d'une étoile.
Démontrez explicitement cette loi dans le cas d'une trajectoire circulaire.
- 1*e.** Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit : $E_m = -\frac{GMm}{2R}$.
Commenter le signe de cette énergie.

2. Système binaire : Point matériel fictif

Considérons désormais l'ensemble formé par deux étoiles A_1 et A_2 , de masses identiques M , en interaction gravitationnelle. Cet ensemble est supposé mécaniquement isolé.

- 2*a.** Justifier que le barycentre B des deux étoiles est animé dans (R) d'un mouvement rectiligne uniforme (la norme de sa vitesse dans (R) sera notée v_B).
- 2*b.** Définir le référentiel barycentrique du système des deux étoiles. Ce référentiel est-il galiléen ?
- 2*c.** Montrer que, dans le référentiel barycentrique, le mouvement du point F défini par $\vec{BF} = \vec{A_1A_2}$ est celui d'un point matériel fictif, qui est soumis à la même force que celle qui agit sur A_2 et dont on exprimera la masse μ en fonction de M .
- 2*d.** Dans le référentiel barycentrique, le point F est animé d'un mouvement circulaire de rayon R de centre B .
Déterminer la vitesse angulaire ω de ce mouvement en fonction de G , M et R .

Soit un système de deux étoiles à neutron de masses $M = 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Peu de temps avant l'effondrement, elles ont une période de rotation très faible $T = 0,1 \text{ s}$.
- 2*e.** Déterminer numériquement la distance qui sépare ces deux étoiles.
Déterminer la norme de la vitesse v_A des étoiles dans le référentiel barycentrique.
- 2*f.** Décrire les trajectoires des deux points A_1 et A_2 dans le référentiel barycentrique.
Illustrer à l'aide d'une représentation graphique.

3. Energie mécanique du système

- 3*a.** Exprimer l'énergie cinétique dans (R) du système des deux étoiles en fonction de M , v_B et de l'énergie cinétique E_c^* du système dans son référentiel barycentrique.
- 3*b.** Dans le cas où le mouvement de F est circulaire dans le référentiel barycentrique, exprimer l'énergie cinétique E_c^* du système des deux étoiles en fonction de ω , M et R .
- 3*c.** Exprimer l'énergie mécanique E_m du système des deux étoiles dans le référentiel (R) , en fonction de M, G, R et v_B .

4. Effondrement du système binaire

Le système binaire des deux étoiles A_1, A_2 est la source d'ondes gravitationnelles, qui transportent une certaine énergie. Un calcul de relativité générale montre que la puissance ainsi « rayonnée » s'écrit, dans le référentiel (R) :

$$P_{og} = K M^2 R^4 \omega^6, \quad \text{où } K \text{ est une constante s'exprimant en fonction de } G \text{ et } c$$

(vitesse de la lumière dans le vide) sous la forme : $K = \frac{8G}{5c^5}$.

L'émission de ces ondes n'affecte pas la vitesse v_B du barycentre. Du point de vue mécanique, l'émission des ondes gravitationnelles peut être modélisée par une force non conservative agissant sur le système des deux étoiles, avec une puissance $-P_{og}$.

- 4*a.** Qu'est ce qu'une force non conservative ?
Quelle relation existe-t-il entre $\frac{dE_m}{dt}$ et P_{og} ?
Quelle est la conséquence de cette perte d'énergie sur la distance R entre les deux étoiles ?

Le rayon R de la trajectoire est désormais considéré comme une fonction $R(t)$ du temps et il est admis que l'expression E_m de l'énergie mécanique déterminée au **3*c.** reste valable.

- 4*b.** Montrer que R varie selon une loi : $\frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha}{R^3}$, et exprimer α en fonction de K, G et M .
- 4*c.** Au temps $t = 0$, la distance entre les étoiles est $R(t = 0) = R_0$. Déterminer $R(t)$ en fonction de R_0, t et α .

Représenter graphiquement l'allure de la trajectoire de l'une des deux étoiles dans le référentiel barycentrique.

Les deux étoiles à neutron sont assimilées à des sphères de diamètre (très faible) $a = 20 \text{ km}$.

4*d. Déterminer, en fonction de R_0 , a et α le temps t_c au bout duquel les deux étoiles entrent en contact.

Exprimer en fonction de G , M et a , la vitesse angulaire de rotation ω_c atteinte par le système à l'instant t_c .

Application numérique : Calculer t_c et ω_c sachant que $R_0 = 4,6 \cdot 10^5 \text{ m}$ et $M = 2,8 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

4*e. Justifier que le modèle précédent n'est valable que si la condition $\left| \frac{dR}{dt} \right| \ll R\omega$ est réalisée. Cette condition est-elle vérifiée jusqu'à l'instant de contact ?

5. Aspect énergétique

5*a. Déterminer la puissance gravitationnelle rayonnée, $P_{og}(t)$, en fonction de t , α , R_0 , K , M et G . Représenter graphiquement $P_{og}(t)$.

Une fois le contact réalisé, l'émission de l'onde gravitationnelle cesse.

5*b. Exprimer la puissance maximale, notée $P_{og,max}$ rayonnée par le système sous forme d'onde gravitationnelle, en fonction de K , G , M et a .

Comparer à la puissance électromagnétique totale émise par notre Soleil $P_{Sol} = 4,5 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

5*c. Déterminer l'énergie totale E_{og} rayonnée sous forme gravitationnelle entre les instants $t = 0$ et t_c , en fonction de G , M , R_0 et a .

FIN DE L'EPREUVE