

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2009

FILIÈRE PC

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices **n'est pas** autorisée pour cette épreuve.

Stabilité de la matière, stellaire et interstellaire

Les nuages de gaz interstellaire que l'on trouve dans l'univers peuvent s'effondrer sous l'effet de leur propre champ gravitationnel et donner lieu à des structures denses, dont la stabilité même n'est pas nécessairement assurée. L'objet de ce problème est d'analyser certaines situations conduisant à ce phénomène.

On admettra qu'une distribution de masse caractérisée par une masse volumique $\rho(\vec{r})$ donne lieu à un champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ dérivant d'un potentiel $\varphi(\vec{r})$ avec $\vec{g}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$ et tel que $\text{div } \vec{g} = -4\pi G\rho$.

Données numériques

Constante gravitationnelle : $G = 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

I. Première approche

I.1 Si l'on cherche à déterminer le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ résultant d'une distribution de masse volumique $\rho(\vec{r})$, on peut s'appuyer sur une analogie électrostatique. Préciser, dans le cadre de cette analogie, les quantités qui jouent les rôles de $\vec{g}(\vec{r})$, de $\rho(\vec{r})$ et de G .

I.2 Soit une boule de rayon R centrée à l'origine des coordonnées, dont la distribution de masse est à symétrie sphérique. Soient $\rho(r)$ la masse volumique, $m(r)$ la masse de la boule de rayon r (pour $r < R$) et M la masse totale.

I.2.1 Déterminer, pour $r \geq R$, le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ produit par cette boule de matière.

I.2.2 Déterminer de même, pour $r < R$, le champ gravitationnel $\vec{g}(\vec{r})$ à l'aide de $m(r)$.

I.3 Soit une boule gazeuse de masse volumique ρ uniforme, de masse M et de rayon R_0 , initialement au repos. Elle s'effondre sous l'effet de son propre champ gravitationnel. On suppose que ce mouvement garde à tout moment la symétrie sphérique; on fait l'hypothèse qu'un élément quelconque du milieu gazeux, de masse μ , initialement à la distance r_0 , a un mouvement de chute libre, c'est-à-dire qu'il n'est soumis qu'à la force de gravitation du gaz situé initialement à une distance du centre inférieure à r_0 et qui se contracte.

✦ **I.3.1** On rappelle la loi de Kepler reliant, dans le cas d'une trajectoire elliptique d'un corps attiré par une masse ponctuelle M_0 , la période \mathcal{C} au demi-grand axe a :

$$\mathcal{C} = 2\pi(a^3/GM_0)^{1/2}.$$

En déduire l'expression de la durée de chute τ_g jusqu'à l'origine en fonction de G et ρ . Cette durée dépend-elle de r_0 ?

♣ **I.3.2** Calculer τ_g pour $M = 2,0 \times 10^{30}$ kg et $R_0 = 7,0 \times 10^8$ m (valeurs correspondant au Soleil).

Même calcul pour un nuage intergalactique sphérique, de rayon 10^8 fois celui du Soleil et possédant dix atomes d'hydrogène par cm^3 .

I.3.3 Quelle force antagoniste, non prise en compte, peut freiner un tel effondrement et éventuellement l'arrêter ?

I.4 On suppose que le gaz de la boule précédente possède une température moyenne T non nulle. Ce gaz est supposé parfait, monoatomique et de masse molaire M_A .

I.4.1 Donner l'expression de l'énergie cinétique totale U_{cin} du gaz en fonction de T, M, M_A et de la constante des gaz parfaits R_{GP} .

I.4.2 L'énergie potentielle de gravitation E_g de la boule est donnée par :

$$E_g = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R_0}.$$

Si $E_g + 2U_{\text{cin}} < 0$, on montre qu'un effondrement s'amorce. Déterminer le rayon critique R_c tel que, à ρ fixé et pour $R_0 > R_c$, ce phénomène se produit. Exprimer R_c en fonction de ρ, T , et des constantes G, M_A et R_{GP} .

I.4.3 Soit c_S la vitesse des ondes acoustiques dans le gaz et $\tau_S = R_0/c_S$ une estimation du temps mis par une perturbation acoustique pour aller de la surface au centre. Expliciter c_S en fonction de T, M_A et R_{GP} et exprimer τ_S .

Montrer que τ_S est supérieur à τ_g pour $R_0 > R_S$ où R_S est une distance que l'on explicitera en fonction de ρ, T , et des constantes G, M_A et R_{GP} . Quelle interprétation dynamique vous suggère la comparaison de R_S et R_c ?

II. Stabilité d'une étoile

On s'intéresse dans cette partie aux propriétés d'une étoile dense, comme le Soleil, que l'on décrira comme une boule de gaz parfait à symétrie sphérique de masse totale M . On reprend les notations de la partie I : $\rho(r)$, $m(r)$, $\vec{g}(\vec{r})$ et on en utilisera les résultats.

II.1 On suppose la distribution à l'équilibre.

II.1.1 Exprimer, à l'aide de $m(r)$ et $\rho(r)$, la force de gravitation par unité de volume à la distance r du centre.

II.1.2 Dans le fluide règne une pression locale $P(r)$ avec $P(R) = 0$ à la surface. Exprimer la condition d'équilibre; en déduire $\frac{dP}{dr}$.

II.2 On s'intéresse à l'aspect énergétique. Soit E_g l'énergie potentielle de gravitation de toute la boule et dE_g la contribution à cette énergie de la couche sphérique de masse $dm(r)$ située entre r et $r + dr$.

II.2.1 Exprimer dE_g à l'aide de $m(r)$ et de $dm(r)$.

II.2.2 Montrer que dE_g s'écrit $dE_g = \frac{dP}{dr} 4\pi r^3 dr$.

II.2.3 Montrer que $E_g = -3 \int_0^R P dV$ où $dV = 4\pi r^2 dr$ est le volume de la couche sphérique comprise entre r et $r + dr$.

II.3 Rappeler l'expression de l'énergie interne molaire U_{mol} d'un gaz parfait en fonction de la capacité thermique molaire C_V et de la température thermodynamique T . Soit $\gamma = C_P/C_V$. Exprimer U_{mol} en fonction de γ , de T et de la constante des gaz parfaits R_{GP} .

II.4 Déduire de cette expression et de la précédente une relation entre E_g et l'énergie interne totale U du gaz. On supposera que γ est uniforme.

II.5 Exprimer l'énergie totale E de la boule en fonction de U . Déterminer à quelle condition portant sur γ l'étoile est stable.

II.6 Que devient la relation entre E_g et U obtenue en **II.4** pour $\gamma = 5/3$. À quel type de gaz correspond cette valeur? À quelle forme d'énergie correspond alors U ?

II.7 Si la température T croît, écartant un peu le système de l'équilibre, les réactions nucléaires s'accroissent et fournissent plus d'énergie. En utilisant **II.5**, comment interprétez-vous le retour à l'équilibre, donc la stabilité, du Soleil?

III. Évolution d'une perturbation

On suppose que l'univers est constitué de matière que l'on traitera comme un fluide non visqueux, caractérisé par un champ de masse volumique $\rho(\vec{r}, t)$, un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et un champ de pression $P(\vec{r}, t)$. On appellera $\vec{g}(\vec{r}, t)$ le champ gravitationnel local.

On suppose qu'en plus de la pression et de la gravitation, il existe une autre force extérieure de densité volumique $\vec{f}_V(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{\Gamma}(\vec{r}, t)$ caractérisée ici par le champ vectoriel $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t)$.

III.1 Écrire l'équation locale traduisant la conservation de la masse.

III.2 Écrire l'équation d'Euler traduisant localement le principe fondamental de la dynamique.

III.3 Écrire l'équation locale reliant \vec{g} et ρ .

III.4 On suppose que le milieu est suffisamment dilué pour négliger la pression : $P_0 = P(\vec{r}, t) \equiv 0$. On considère à un instant t_0 une région de masse volumique uniforme ρ_0 et au repos : $\vec{v}(\vec{r}, t_0) = \vec{0}$; on note $\vec{g}_0(\vec{r})$ le champ gravitationnel dans cette région, et on suppose $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t) = -\vec{g}_0$.

III.4.1 Montrer que $\rho = \rho_0$ et $\vec{v} = \vec{0}$ est solution des équations précédentes pour $t > t_0$ (solution statique).

III.4.2 À un instant donné, cette région est soumise à une perturbation; son état est alors caractérisé par le champ de vitesse $\vec{v}_1 = \vec{v}(\vec{r}, t)$, la masse volumique $\rho = \rho_0 + \rho_1$ et le champ $\vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_1$; on suppose toujours $P = 0$ et $\vec{\Gamma} = -\vec{g}_0$.

Exprimer les trois équations qui relient \vec{v}_1, ρ_1 et \vec{g}_1 . Les linéariser par rapport à ces trois variables. En déduire l'équation satisfaite par ρ_1 .

Qu'en concluez-vous sur l'évolution de la perturbation? Préciser le temps caractéristique d'évolution.

III.5 La croissance d'une perturbation crée progressivement une surpression P_1 .

III.5.1 Écrire l'équation d'Euler en tenant compte de cette pression et la linéariser.

III.5.2 La pression et la masse volumique du fluide sont liées par l'équation d'état $P(\rho)$. Montrer que ρ_1 est solution de l'équation : $\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_S^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_0 \rho_1$ où on exprimera c_S en fonction de $\frac{dP}{d\rho}$.

III.5.3 On cherche alors des solutions de l'équation précédente sous la forme $P_1(\vec{r}, t) = A \exp i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$. Exprimer la relation de dispersion $\omega(k)$ donnant ω en fonction de k .

III.5.4 Montrer qu'il existe un nombre d'onde critique k_J tel que, pour $k < k_J$, les perturbations sont exponentiellement amplifiées. Exprimer la longueur caractéristique associée $\lambda_J = 2\pi/k_J$ en fonction de G, ρ_0 et c_S .

Comparer cette longueur aux rayons R_c et R_S déterminés en **I.4.2** et **I.4.3**.

III.5.5 On désigne par *masse de Jeans* et on note M_J la masse de la boule de rayon $\lambda_J/2$. En donner l'expression. Traduire la stabilité du fluide par une condition sur sa masse totale M et sur M_J .

IV. Univers en expansion et stabilité

L'Univers est en expansion uniforme. Une origine étant choisie (arbitraire, l'espace étant homogène et isotrope) et un repère \mathcal{R} d'observation déterminé, soit \vec{s} le vecteur position d'un point matériel de l'espace à l'instant de référence t_R . À un instant t , ce point matériel se trouve en $\vec{r}(t) = a(t)\vec{s}$ où $a(t)$ est un facteur d'échelle universel, avec $a(t_R) = 1$. Il est donc en mouvement dans \mathcal{R} avec la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{a}\vec{s} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$.

Dans cette partie, on suppose $\vec{\Gamma}(\vec{r}, t) \equiv \vec{0}$.

IV.1 On considère deux points matériels A et B repérés respectivement par \vec{r}_A et \vec{r}_B . Expliciter leur vitesse relative $\vec{v}_A - \vec{v}_B$. En déduire que tout point, par exemple B , peut être choisi comme « centre » de l'expansion.

IV.2 La matière constituant l'univers est, comme en **III.4**, considérée comme un fluide non visqueux de masse volumique uniforme $\rho_0(t)$, de pression $P_0 = 0$ mais animé dans \mathcal{R} d'une vitesse locale $\vec{v}_0(\vec{r}, t) = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r}$.

IV.2.1 L'équation obtenue en **III.1** est satisfaite par la solution $\rho_0(t) = a^{-3}(t)\tilde{\rho}_0$ où on a posé $\tilde{\rho}_0 = \rho_0(t_R)$. Montrer que l'intégrale de $\rho_0(t)$ sur une boule de rayon $r(t)$ est une constante au cours du temps. Quelle propriété physique ce résultat traduit-il ?

IV.2.2 Montrer que l'équation obtenue en **III.2** est satisfaite par $\vec{g}_0(\vec{r}, t) = -\frac{4\pi G\rho_0(t)}{3}\vec{r}$ à condition que $\ddot{a}a^2$ soit une constante que l'on précisera.

IV.2.3 Une solution $a(t)$, correspondant à un modèle cosmologique particulier, est telle que $a(t=0) = 0$. Déterminer cette solution en cherchant pour $a(t)$ une dépendance temporelle de la forme t^α .

IV.2.4 Exprimer $H(t) \equiv \dot{a}/a$ en fonction de t .

On pose $H_R = H(t_R)$. Exprimer t_R en fonction de H_R .

Pourquoi appelle-t-on t_R « âge de l'univers » ? Calculer l'âge que donne ce modèle avec la valeur de H_R que permet d'obtenir l'expérience : $H_R = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$. Le *parsec* (symbole « pc ») est une unité de longueur couramment utilisée en astronomie et adaptée aux grandes échelles de distance : $1 \text{ pc} = 3,262 \text{ année-lumière}$; son multiple Mpc est le mégaparsec.

IV.3. On cherche à déterminer l'évolution temporelle d'une perturbation, l'état de base étant celui étudié en question **IV.2** et caractérisé par $\{\rho_0(t), \vec{v}_0(\vec{r}, t), g_0(\vec{r}, t), P_0 = 0\}$. On pose :

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(\vec{r}, t), \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1(\vec{r}, t), \quad \vec{g} = \vec{g}_0 + \vec{g}_1(\vec{r}, t), \quad P = P_0 = 0$$

et on ne retiendra dans les équations que les termes linéaires en ρ_1, \vec{v}_1 et \vec{g}_1 .

IV.3.1 En utilisant l'opérateur de dérivation à l'ordre zéro : $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla})$, montrer que l'équation de conservation de la masse (cf. **III.1**) conduit à :

$$\frac{d\rho_1}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho_1 + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0.$$

On pose $\delta = \frac{\rho_1(\vec{r}, t)}{\rho_0(t)}$ et $\dot{\delta} = \frac{d\delta}{dt}$. Montrer que $\dot{\delta} + \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0$.

IV.3.2 Montrer de même que l'équation d'Euler (cf. **III.2**) conduit à l'équation :

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} + \frac{\dot{a}}{a}\vec{v}_1 = \vec{g}_1.$$

IV.3.3 Écrire l'expression reliant \vec{g}_1 et ρ_1 . Cette relation forme avec les deux équations obtenues aux questions précédentes un système fermé. En éliminant \vec{g}_1 et \vec{v}_1 , montrer que δ satisfait l'équation différentielle :

$$\ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_0\delta = 0.$$

Indication. On utilisera le fait que \vec{r} évoluant proportionnellement à $a(t)$, on a pour tout champ de vecteur $V(\vec{r}, t)$:

$$\frac{d}{dt} \operatorname{div} \vec{V} = -\frac{\dot{a}}{a} \operatorname{div} \vec{V} + \operatorname{div} \left(\frac{d\vec{V}}{dt} \right).$$

IV.3.4 En utilisant l'expression de $\rho_0(t)$ et celle de $a(t)$ obtenue en **IV.2.3** expliciter l'équation différentielle de δ . L'équation admet des solutions de la forme t^β ; en donner la solution générale.

Qu'en concluez-vous sur l'évolution temporelle d'une perturbation? La comparer à celle obtenue en **III.5.4**.

* *
*